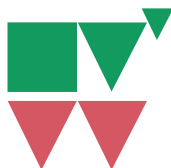
EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

WISKUNDE DIGITAAL
PAUZES OP SCHOOL
WWF FINANCIERT PROJECT IN KENIA
JAARREDE 2013
GONIO: PROSTHAPHAIRESIS
GEFASCINEERD DOOR VEELVLAKKEN

NR.3



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

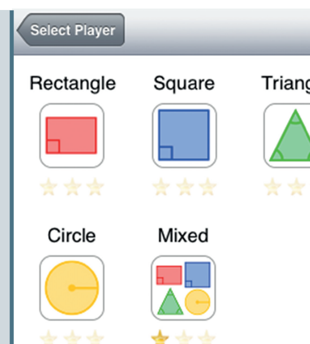
JAARGANG 89 | DECEMBER 2013

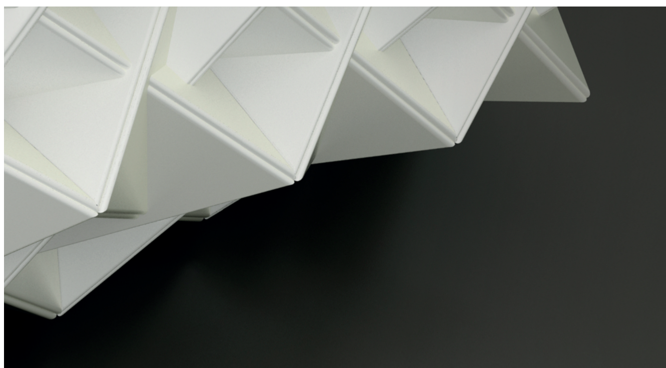
INHOUDSOPGAVE

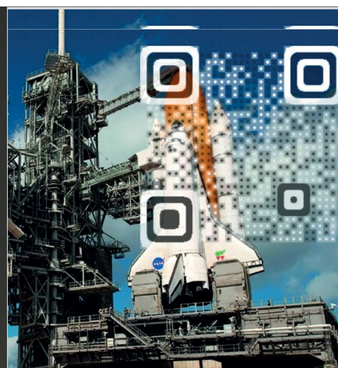
EUCLIDES JAARGANG 89 NR 3

IN DIT NUMMER

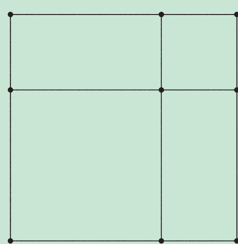


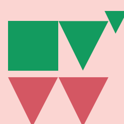






ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN





KORT VOORAF

Afgelopen maand wilde ik met mijn 6 vwo-leerlingen nog wat laatste puntjes op de i zetten voordat ze aan hun eerste schoolexamen zouden beginnen. Het idee was om ze te confronteren met een aantal basisvaardigheden. De werkvorm die ik koos was *speeddaten*. In iedere ronde kregen leerlingen een andere opgave voorgeschoteld en moesten die samen met steeds een andere medeleerling binnen vijf minuten oplossen. Na acht ronden waren we 40 minuten verder en konden we alle uitwerkingen bespreken. Gezien de tijd van het jaar kregen de leerlingen per goede oplossing een chocolademunt. Afhankelijk van de hoeveelheid chocolade die ze mee naar huis namen, moesten er nog wel wat basisvaardigheden worden bijgespijkerd.
Een collega zei later tegen me: 'Wat goed dat je dat zomaar uit je mouw schudt'.
Nou, laat ik dat direct recht zetten, mocht u ook op die gedachte gekomen zijn. Het is een beetje van mezelf... en heel veel van anderen. *Speeddaten* met wiskunde leerde ik van Mariken Barents, de geboorte van het getal e van Rob van Oord (beschuit met muisjes in de klas), domino met gonio van Anja Moeijes en zo kan ik nog veel mooie werkvormen en inspirerende personen noemen. En waar kom ik deze mensen tegen? Simpel, op de verenigingsdag, de Nationale Wiskundedagen, in uw eigen *Euclides* of gewoonweg ergens in het wild bij een nascholingsactiviteit.
In de loop der jaren zijn mijn basisvaardigheden aangevuld door collega's die vrijwillig hun kennis en passie met me wilden delen. Want hoewel we voor de klas alleen staan, kunnen we in de voorbereiding heel veel samen doen. Een mooie gedachte om de kerstvakantie mee in te gaan...
De redactie wenst u fijne feestdagen en alvast een goed 2014.

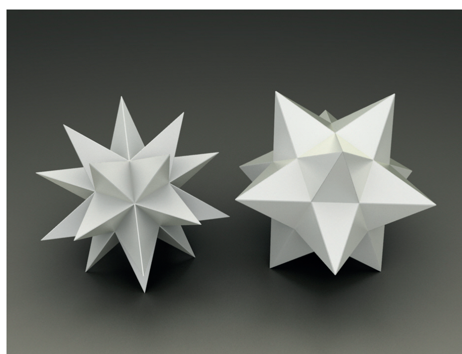
Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*

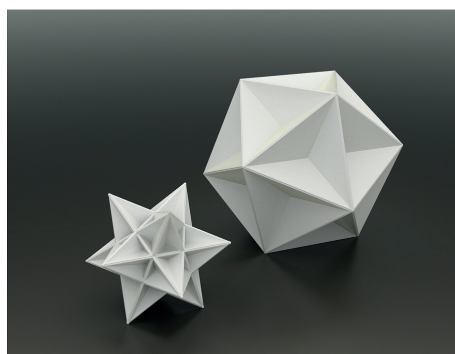
GEFASCINEERD DOOR VEELVLAKKEN

Marjanne de Nijs

RINUS ROELOFS OOGST ROEM OP INTERNATIONAAL CONGRES

Het internationale congres Bridges streek dit jaar neer in Enschede. Een goede reden om er een paar dagen van de zomervakantie door te brengen, vond Marjanne de Nijs. De voordracht van de Britse Nobelprijswinnaar Walter Kroto viel wat tegen, maar onze eigen Rinus Roelofs schreef geschiedenis.





figuur 1a Kepler-veelvlakken

figuur 1b Poinsot-veelvlakken met gelijkzijdige driehoeken

Een ieder die enthousiast wordt van de combinatie wiskunde, kunst, muziek, architectuur en film kon zich dit jaar vijf dagen uitleven bij Bridges Enschede 2013.[1] Naast plenaire en parallelle lezingen waren er workshops, films en kunstexposities. Op de laatste dag was ik enigszins ‘vol’ van alle indrukken die ik had opgedaan, maar toch ging de wekker weer vroeg, want om half tien zou Rinus Roelofs zijn presentatie geven. Afgelopen jaar was ik bij zijn plenaire lezing op de Nationale Wiskunde Dagen[2] waar hij zijn zelfdragende constructies[3] presenteerde. Door middel van een 3d-tekenprogramma[4] dat bewegende beelden toont, kregen we zicht op zijn processtappen en de gedachtegang die leidt tot deze prachtige constructies. Hierdoor deelde hij zijn fascinatie met ons en dat inspireerde me als docent, want dat zou ik in de klas ook graag met leerlingen bereiken. Naar aanleiding van deze ervaring keek ik dus met hoge verwachtingen uit naar zijn presentatie tijdens de Bridges-conferentie.

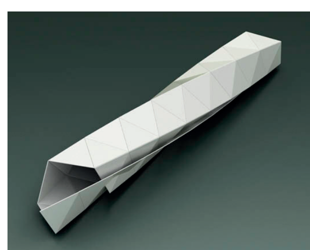
Rinus nam ons mee op een wonderlijke reis door de geschiedenis van (uniforme) veelvlakken, onderbouwd met prachtige filmpjes van in- en uitvouwende objecten. De platonische lichamen waren uiteraard het startpunt, met kort nog even een duidelijk bewijs waarom dit er precies vijf zijn. In 1619 publiceerde Kepler over een uitbreiding hierop met twee regelmatige sterveelvlakken. Tweehonderd jaar later voegt Poinsot er nog twee aan toe, zie figuur 1. De Kepler-Poinsot-lichamen hebben vlakken die regelmatige sterveelhoeken zijn. Alle lichamen hebben rond ieder hoekpunt dezelfde samenstelling van vlakken. Deze negen veelvlakken zijn onderdeel van een grote familie die we de uniforme veelvlakken noemen, zie kader voor een definitie.

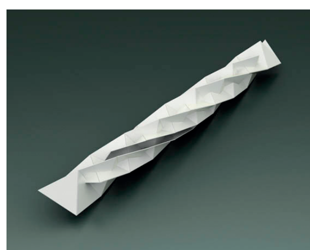
In 1937 beschrijven Coxeter, Longeut-Higgins en Miller drie nieuwe regelmatige veelvlakken die als eigenschap hebben dat ze oneindig zijn.[5] In 1974 verdelen Wachman, Burt en Kleinmann deze zogenaamde oneindige veelvlakken in drie soorten.[6] Rinus Roelofs zoomt hierbij in op de eerste groep: de cilindrische veelhoeken die slechts in een richting oneindig zijn. Een voorbeeld daarvan is de tetraëderhelix die opgebouwd lijkt uit meerdere tetraëders. In werkelijkheid kan deze echter gevouwen worden uit drie samengevoegde strippen van gelijkzijdige driehoeken, zie figuur 2. Dit vouwen laat Rinus dus zien met behulp van zijn programma, en op verzoek herhaalt hij het voor een heftig meeschrijvende bezoeker. De rest van de zaal wil alleen maar dat hij doorgaat, want we merken dat we aan het einde van dit historische overzicht zitten en er nieuwe wegen ingeslagen gaan worden. Daarin worden we niet teleurgesteld. Want stel dat we niet drie strippen met gelijkzijdige driehoeken hebben, maar vijf. En we vouwen die als een cilinder waarbij de onderste driehoek van de rechterzijde tegen de derde driehoek van onderen van de linkerzijde wordt gelegd. Dan creëer je een deltaveelvlakhelix, zie figuur 3. Tot hier had ik het idee dat alle constructies ook thuis aan de keukentafel konden worden uitgevoerd. Met vouwpapier en een beetje geduld kan je een eind komen. Al snel loop je echter tegen grenzen aan waar Rinus zich met behulp van zijn software niet door laat weerhouden.

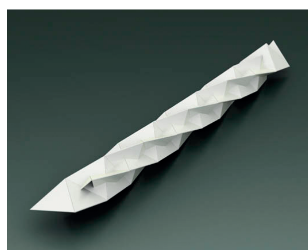
Want wat gebeurt er als je de draaihoek van de helix scherper wilt? Een optie is dan om de strippen elkaar te laten snijden en dan pas aansluiten, zie figuur 4. Het veelvlak dat hierdoor ontstaat, de *Helical star deltahedron*, is bijzonder. En terwijl het publiek nog aan het bijkomen is van deze ontwikkeling, legt Rinus Roelofs deze nieuwe vorm naast de definitie van de uniforme veelvlakken. Aangezien alle zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn en de zijdes gelijk, kunnen we waarschijnlijk spreken van een tot nu toe niet ontdekt uniform veelvlak. Dat levert Rinus op een dinsdagochtend in de zomervakantie een daverend applaus op en hopelijk de komende maanden internationale roem.

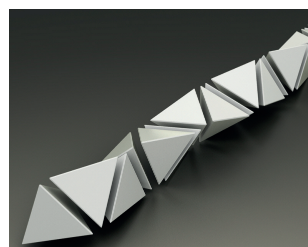
Door te variëren met het aantal strippen en het schuiven met de aansluiting van de zijdes op elkaar, ontstaat een hele familie van *Helical star deltahedra*. Op de voorkant van dit nummer van *Euclides* ziet u een *Helical star deltahedron* opgebouwd vanuit twaalf strippen met gelijk-zijdige driehoeken.

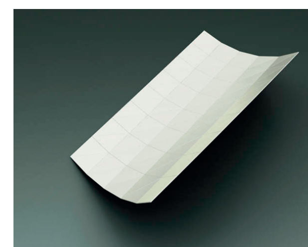
Definitie uniforme veelvlakken:
Een veelvlak is een verzameling van veelhoeken met de eigenschap dat iedere zijde van een veelhoek verbonden is met precies één zijde van een andere veelhoek. Een uniform veelvlak wordt gekenmerkt doordat het is opgebouwd uit uitsluitend regelmatige veelhoeken, waartoe ook de regelmatige sterveelhoeken worden gerekend, en waarbij in ieder hoekpunt er evenveel van ieder aanwezig type regelmatige veelhoek samenkomen, steeds in dezelfde volgorde. Er zijn 75 uniforme veelvlakken bekend (buiten twee oneindige series prisma's). Men vermoedt dat er niet meer zijn, maar een sluitend bewijs ontbreekt. Ook de regelmatige veelvlakken behoren tot de uniforme veelvlakken.

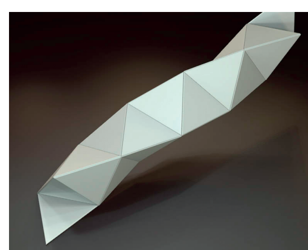

figuur 4a De strippen snijden elkaar

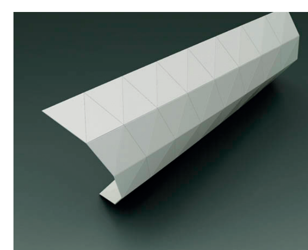

figuur 4b Bijna gesloten

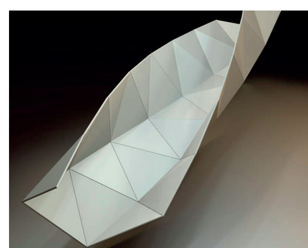

figuur 4c *Helical star deltahedron*

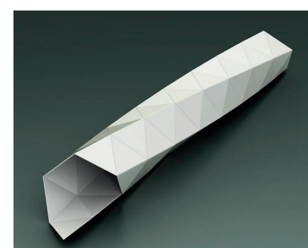

figuur 2a Tetraëders


figuur 3a Vijf strippen


figuur 2b Tetraëderhelix


figuur 3b Vouwen


figuur 2c Openvouwen van de tetraëderhelix


figuur 3c Deltaveelvlakhelix

Noten

[1] Zie *http://bridgesmathart.org/*
[2] Zie *www.fisme.science.uu.nl/nwd/*
[3] Zie *www.rinusroelofs.nl/*
[4] Zie *www.rhino3d.nl/index.html*
[5] H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, & J.C.P. Miller (1953/54). *Uniform Polyhedra*. London: Philos. Trans. Roy. Soc.
[6] A. Wachman, M. Burt, & M. Kleinmann (1974). *Infinite Polyhedra*. Haifa: Technion.

Over de auteur
Marjanne de Nijs is werkzaam als docent wiskunde op het Lyceum Ypenburg in Den Haag. Daarnaast is ze hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *marjanne.de.nijs@gmail.com* of *redactie-euclides@nvvw.nl*

EEN GOED BEGIN. . .

PLANNEN

Erika Bakker



Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.

Vorig jaar maakte ik voor elke les een uitgebreide planning. In blokjes van vijf of tien minuten beschreef ik voor elk van mijn elf lessen in de week wat er moest gebeuren. Dit resulteerde in elf geprinte A4'tjes per week en een hele dikke map met lesplanningen die ik overal mee naar toe nam. Gedurende het jaar werd ik er wel steeds beter in om flexibel met mijn planningen om te gaan. Toch heb ik deze manier van lessen voorbereiden het hele jaar volgehouden. Het begin van een nieuw schooljaar en meer lesuren per week was voor mij een goede reden om mijn lesplanningen een beetje aan te passen. Ik heb besloten om niet alles meer uit te typen. Dat scheelt al heel veel tijd. Ook dwing ik mezelf om geen lange zinnen maar steekwoorden op te schrijven. Voorbeelden schrijf ik nog steeds wel helemaal uit, omdat ik het erg lastig vind om tijdens mijn uitleg een goed voorbeeld te bedenken.

Naast planningen voor mijzelf, maak ik ook planners voor de leerlingen. Per les staat hierop welke sommen er die les gemaakt moeten worden. Sommen die de leerlingen niet afkrijgen, zijn huiswerk voor de volgende les. Ik ben hier meteen de eerste les van het jaar mee begonnen. Het gaf in eerste instantie wel wat problemen, omdat een aantal leerlingen in 3 vwo de planner niet begreep. Ze liepen direct op mijn planning voor, omdat ze dachten dat het huiswerk dat bij een bepaalde datum stond ook voor die datum af moest zijn. Toch kregen ze al snel het systeem door en als ik nu in de schriften van de leerlingen kijk, dan lopen ze vaker achter dan voor op mijn planning.

Voor de brugklas werk ik vanaf hoofdstuk 2 met planners. Om het voor de leerlingen extra duidelijk te maken, heb ik daar niet alleen ingezet welke sommen in een bepaalde les gemaakt moeten worden, maar ook op welke datum het werk af moet zijn. Na het uitdelen van de planner heb ik aan mijn klassen verteld dat dit een planner voor het hele hoofdstuk was en dat niet alles morgen af hoefde te zijn. Al snel kwam de vraag: 'Maar hoe ver mogen we dan vooruit werken?'

Ondanks mondelinge toelichting voorkwam de strakke indeling van mijn planner niet dat er, één les nadat ik de planner had uitgedeeld, een paar leerlingen waren die al een week voorliepen. Om dit bij andere hoofdstukken te voorkomen, heb ik de planning nog een keer met de leerlingen doorgenomen en verteld dat het eigenlijk niet de bedoeling was om ver vooruit te werken, omdat ze dan in de les zo weinig te doen zouden hebben. Ook heb ik gezegd dat het natuurlijk heel verstandig is om een paar sommen vooruit te maken als je al weet dat je 's middags eigenlijk geen tijd hebt om huiswerk te maken. Dat is juist het voordeel van een planner. Deze opmerking kwam helaas niet bij iedereen over. Dit ontdekte ik toen één van mijn leerlingen een paar dagen later met een briefje van haar moeder bij mijn bureau stond. Het meisje had thuis het bericht overgebracht dat ze absoluut niet vooruit mocht werken. Met vier verjaardagen in de komende week vroeg moeder zich af of dat voor één keer misschien nu wel zou mogen... Na nog een extra uitleg over de planner aan zowel het meisje als (schriftelijk) aan de moeder, is de boodschap dan toch overgekomen. Het meisje stelde vervolgens zelf voor om dan per les een paar opgaven in het weekend te maken en de rest voor de les te bewaren.

Eigenlijk wil ik het enthousiasme van mijn brugklasleerlingen niet verminderen door te zeggen dat ze niet vooruit mogen werken, maar ik heb nu al vaak gemerkt dat het lastig is om leerlingen die voorlopen op de planner te betrekken bij klassikale uitleg of het bespreken van opgaven. Vaak zeggen ze dan: 'Die heb ik al gemaakt.' Mijn uitleg kunnen ze dan niet meer gebruiken bij het maken van opgaven, waardoor kleine foutjes, zoals het verkeerd gebruiken van hoofdletters en kleine letters, snel gemaakt zijn en het moeilijk is om dit soort dingen goed aan te leren. Toch hoop ik wel dat sommige brugklassers de vooruitwerk-mentaliteit vasthouden tot in de bovenbouw, zodat er daar ook eens een leerling is die voorloopt op de planner.

Over de auteur
Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde.
E-mailadres: *erikabakker66@gmail.com*

PAUZES OP SCHOOL

ONDERBOUWWISKUNDEDAG 2013

Dédé de Haan
Vincent Jonker
Monica Wijers
Michiel Doorman

Op vrijdag 6 februari 2013 werd de tweede OnderbouwWiskundeDag georganiseerd. Geïnspireerd op de welbekende A-lympiade en Wiskunde B-dag werken bij deze wedstrijd teams van derdeklassers de hele dag aan een uitdagende wiskundeopdracht. In dit artikel kijken de organisatoren van de OnderbouwWiskundeDag terug op de editie van 2013.



Gedurende de OnderbouwWiskundeDag werken leerlingen uit 3 havo/vwo in teams van 3 à 4 leerlingen gedurende een dag aan een 'grote' wiskundige (denk) opdracht waarin probleemoplossen centraal staat. Dit resulteert in een eindproduct, meestal in de vorm van een werkstuk. Inhoudelijk sluit deze opdracht, voor zover mogelijk, aan bij de nieuwe doelen voor de onderbouw. De opdracht van 2013 ging over leerrendement, dat is het percentage van de tijd dat je effectief werkt of leert. Aan de hand van grafieken en vuistregels rond leerrendement ontworpen de teams een optimaal lesrooster voor een school voor voortgezet onderwijs. Hierbij moet vanzelfsprekend met een aantal randvoorwaarden (bijvoorbeeld een urennorm) rekening worden gehouden.
Bij deze OnderbouwWiskundeDag deden elf scholen mee met in totaal 52 teams uit 3 havo en 136 teams uit 3 vwo. Docenten kozen zelf het beste werkstuk van hun school en daarna werd uit deze selectie landelijk het beste team aangewezen door de jury van de OnderbouwWiskundeDag. Dit jaar was dit een team van het St. Michaël College te Zaandam.

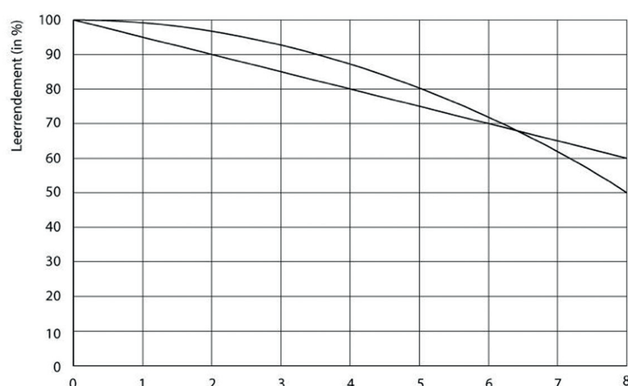
Achtergrond

Voor het curriculum wiskunde in de onderbouw havo/vwo wordt gezocht naar zogenaamde 'denkactiviteiten', opdat leerlingen hun verworven vaardigheden in nieuwe situaties leren toepassen. In feite is deze doelstelling van de OnderbouwWiskundeDag (OWD) dezelfde als bij de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag.[1] De opdrachten voor de OWD worden zo ontworpen dat:

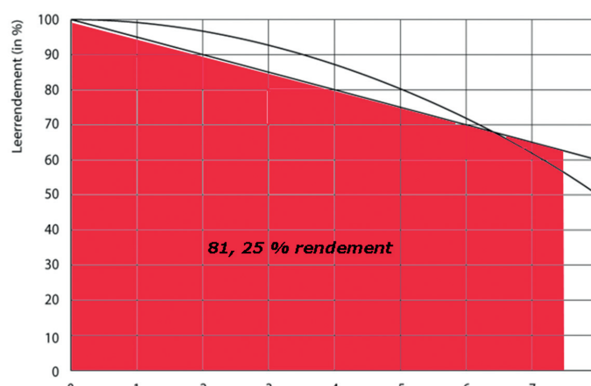
- het probleem in een (meestal buiten-wiskundige) context wordt aangeboden zodat leerlingen kunnen laten zien dat ze hun kennis en vaardigheden kunnen toepassen;
- de te gebruiken wiskunde voldoende herkenbaar, maar niet te specifiek A (of C) of B (of D) is;
- de opdracht mogelijkheden biedt voor proberen, analyseren, redeneren, rekenen en ontwerpen;
- alle deelnemende teams met een gemiddelde inspanning een resultaat kunnen bereiken, terwijl er tegelijkertijd differentiatiemogelijkheden zijn. Met name in de resultaten van de eindopdracht zullen er verschillen zijn in creativiteit, diepgang en het gebruik van wiskunde.

Dit zijn belangrijke criteria voor de beoordeling met het oog op het wedstrijdelement. De opdracht bestaat uit een enigszins gesloten instap, een middendeel dat vooral gericht is op het onderzoeken en beredeneerd aanpassen van een bestaande situatie en ten slotte een open ontwerpopdracht, waarin ook plaats is voor creativiteit

figuur 1



figuur 2



en reflectie. De opdracht is uit te voeren door groepjes leerlingen die gedurende een dag samenwerken, eindigend in een werkstuk dat ingeleverd wordt bij de wiskundedocent.

Opdracht 2013

De opdracht van de OnderbouwWiskundeDag 2013 is een bewerking van een voorrondeopdracht van de Wiskunde A-lympiade 'Werken met pauzes' uit 2007. De OWD-opdracht gaat over leerrendement – dat is het percentage van de tijd dat je effectief werkt of leert. Dit wordt geplaatst in het kader van een optimaal lesrooster in een school voor voortgezet onderwijs. Een belangrijk element van de opdracht is de grafiek in figuur 1. Met behulp van deze grafiek maken de leerlingen een aantal instapopdrachten. Het achterliggende idee daarbij is dat je door pauzes in te bouwen als het ware terug in de tijd gaat, waardoor het leerrendement weer stijgt. In de eindopdracht (zie kader) werken de leerlingen met de lineaire benadering. De beoordeling richt zich met name op de eindopdracht, maar er wordt ook gekeken naar hoe de instapopdrachten zijn uitgevoerd en verwerkt in het eindproduct.

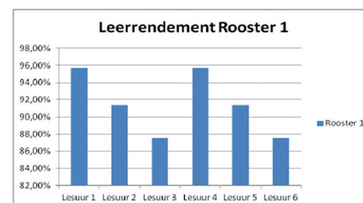
Resultaten van de opdracht

Zoals u wellicht al zelf gezien heeft, biedt de opdracht een intuïtieve opstap naar integraalrekening: de oppervlakte onder de grafiek geeft immers het gemiddelde leerrendement bij onafgebroken les gedurende 7,5 klokuren (9 schooluren van 50 minuten), zie figuur 2. Dit plaatje kwam niet voor in de werkstukken, maar de bijbehorende berekening wel!
De opdracht heeft geresulteerd in ingenieuze lesroosters, die op velerlei manieren zijn gerepresenteerd. Zie figuur 3 en figuur 4 voor enkele voorbeelden. Het team van het St. Michaël College in Zaandam presenteerde een volledig rooster (met alle vakken!), en daarnaast nog een inzichtelijk grafiekje dat het leerrendement gedurende de dag weergaf.

Deelnemende scholen

In totaal zijn er negen werkstukken ingestuurd; de OWD-commissie heeft deze werkstukken beoordeeld en op volgorde gelegd. Dit heeft geresulteerd in het toekennen van een eerste plaats, een tweede plaats, een categorie 'excellent' en een categorie 'goed'.

Het 1e rooster is als volgt:
Lesuur 1: 10.00-10.52
Lesuur 2: 10.52-11.44
Lesuur 3: 11.44-12.36
Pauze: 12.36-13.28
Lesuur 4: 13.28-14.20
Lesuur 5: 14.20-15.12
Lesuur 6: 15.12-16.04



Hierbij wordt na de eerste 3 uur het leerrendement helemaal terug gebracht naar 100%. Zo kan je na de pauze weer opnieuw beginnen met je leerrendement. Aan het eind van de lessen is je leerrendement gedaald tot 87,5%. Je gemiddelde komt dan op (100+87,5)/2=187,5/2=93,75%. Je moet van de overheid 26 klokuren = 1560 minuten per week. Je moet minstens 1450 uur je kunnen concentreren. Dat is dus 1450/1560*100% = 92,9%. De 93,5% is daarom niet echt heel veel.

figuur 3 Uit het werkstuk van Gymnasium Apeldoorn

Het juryrapport bij het winnende werkstuk

De beste werkstukken worden voorzien van een juryrapport [2], opdat docent en leerlingen kunnen zien hoe de criteria zijn toegepast. Dit jaar werd het best gepresteerd door een team van het St. Michaël College uit Zaandam: Otto Bervoets, Roel van Rhijn, Sarjenka van Tol en Jesse Verhagen. Dit is een team uit 3 havo, dat op vrijwillige basis deelnam. Hieronder de tekst van het juryrapport.

Het werkstuk van het team van het St. Michaël College valt op doordat verschillende aspecten van de opdracht zeer goed uitgewerkt zijn: het werkstuk begint met een inleiding, een brief en een conclusie, waaruit blijkt dat het team zich goed ingeleefd heeft in de rol die het toebedeeld heeft gekregen. De brief bestaat uit een beknopte omschrijving van het leerrendement van het oude rooster en een voorstel voor nieuwe roosters, met de voor- en nadelen van de verschillende keuzes die er te maken zijn. In de bijlage staan de bijbehorende berekeningen duidelijk uitgelegd Dit team heeft daarbij een volledig rooster ingevuld, en grafieken toegevoegd die het leerrendement op ieder tijdstip in het rooster duidelijk laten zien. De compleetheid van het werkstuk, met de extra's van het volledige rooster en de grafieken, maakt dat dit werkstuk met glans op de eerste plaats van de OnderbouwWiskundeDag 2013 eindigt.

Winnaars
1. St. Michaël College, Zaandam
2. Gymnasium Apeldoorn

Categorie Excellent
Willibrord Gymnasium, Deurne
Huizermaat, Huizen
Rythoviuscollege, Eersel

Categorie Goed
Canisius, Almelo
Liemers College, Zevenaar
Bonnefantencollege, Maastricht
Het 4de Gymnasium, Amsterdam

Evaluatie onder de docenten

Middels een online enquêteformulier hebben wij gevraagd naar de mening van de docenten die meededen met de OWD 2013. Wij kregen van alle docenten een reactie en hebben daarmee een goed beeld hoe een en ander gelopen is. Over het algemeen vond men het een goede opdracht. Opmerkingen waren onder andere dat de opdracht goed aansloot bij de belevingswereld van de leerlingen en dat het combineren van verschillende vaardigheden een eyeopener voor de leerlingen was.
Als punt van kritiek werd genoemd dat het wiskundig niet bijzonder uitdagend of veelzijdig was. De docenten meldden verder dat de meeste leerlingen erg enthousiast waren; één leerling zou zelfs wel willen blijven zitten in de derde klas om volgend jaar weer mee te kunnen doen.
De docenten rapporteerden ook verschillen tussen de diverse groepjes op hun school: bijvoorbeeld dat de havo-leerlingen het saai vonden en de vwo-leerlingen juist goed doorwerkten, maar in één geval ook dat een groepje met 'wiskunde-nerds' te lang bleef hangen bij het maken van het perfecte rooster en een breder ontwikkeld groepje juist het meest zelfstandig werkte en met het mooiste resultaat kwam.

Conclusie voor het komende jaar

Op basis van deze ervaringen, met zowel de werkstukken die ingestuurd zijn als de evaluatie door de docenten, hebben we besloten volgend jaar wederom een OnderbouwWiskundeDag te organiseren, op 12 februari 2014. U kunt zich inschrijven vanaf 1 oktober 2013, via *www.fisme.science.uu.nl/nl/onderbouwwiskundedag/*.
We blijven ons richten op de doelgroep 3 havo en 3 vwo, waarbij de docent ook dit keer weer bepaalt welke werkstukken ingestuurd worden voor beoordeling door de landelijke jury.

Noten

[1] Zie *www.fisme.science.uu.nl/Alympiade* en *www.fisme.science.uu.nl/wisbdag*
[2] De opdracht, de juryrapporten en meer informatie zijn te vinden op de website van de OnderbouwWiskundeDag: *www.fisme.science.uu.nl/nl/onderbouwwiskundedag/*

Literatuur

De Haan, D., Doorman, L. M., Jonker, V., & Wijers, M. (2012). De OnderbouwWiskundeDag. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 32*(1), 12-16.

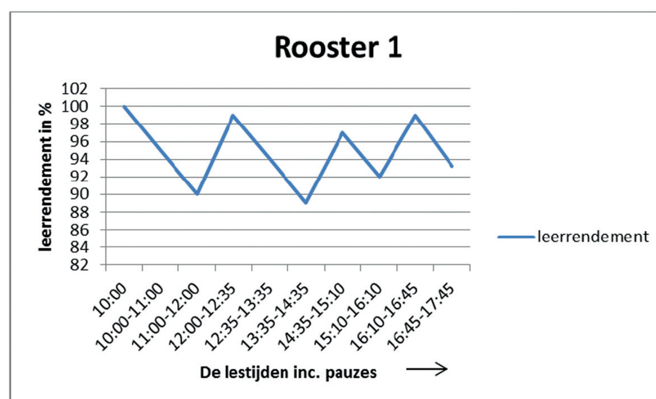
Over de auteurs

Michiel Doorman, Dédé de Haan, Vincent Jonker en Monica Wijers werken aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en organiseren de OnderbouwWiskundeDag. E-mailadres: *owd@science.uu.nl*

Het HAVO-rooster

Wij hebben hierbij voor elke klas een perfect passend rooster gemaakt. Geen dubbele uren, geen uren waarbij je met vijf klassen tegelijk één vak hebt. Hierbij het rooster.

H3A	Maandag	Dinsdag	Woensdag	Donderdag	Vrijdag
1e uur (10.00/11.00)	NE 106	LO BEG	NA 007	MU 00	BI 004
2e uur (11.00/12.00)	GS 203	SK 002	EC 205	SK 002	LO BEG
1e PAUZE (12.00/12.35)					
3e uur (12.35/13.35)	BV 101	EN 113	FR 115	AK 201	WI 210
4e uur (13.35/14.35)	NA 007	WI 210	BI 004	FR 115	LV 015
2e PAUZE (14.35/15.10)					
5e uur (15.10/16.10)	EC 205	DU 112	NL 106	EN 113	DU 112
3e PAUZE (15.10/15.45)					
6e uur (15.45/16.45)		ME 007			



figuur 4 Uit het werkstuk van St. Michaël College Zaandam

Eindopdracht

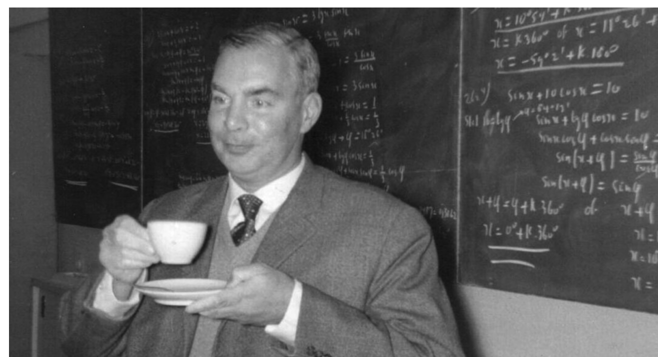
De directie van jouw school wil onderzoeken of het verstandig en mogelijk is om volgend schooljaar een nieuw lesrooster in te voeren, waarmee een hoger leerrendement gehaald kan worden. Jullie zijn de deskundigen die dit onderzoek gaan uitvoeren. De directie vraagt jullie daarbij om het leerrendement van het huidige rooster vast te stellen en enkele nieuwe lesroosters (minimaal twee) uit te werken, die het leerrendement zo groot mogelijk maken. Jullie krijgen daarbij de volgende aandachtspunten mee: andere lestijden, lesuren die langer of korter duren en kortere of langere pauzes, zijn allemaal mogelijk, als het maar wel zó geregeld kan worden dat de norm van 1040 klokuren per jaar wordt gehaald. Dat betekent voor elke leerling tenminste 26 klokuren les per week; elke leerling moet op school een leerrendement van minstens 1450 minuten per week kunnen halen; er geldt natuurlijk hoe hoger hoe beter; de school kan open zijn tussen 8:00 en 18:00 uur. Per dag is er verplicht minimaal 30 minuten pauzetijd in het rooster opgenomen; de meeste leerlingen willen het liefst zo veel mogelijk aaneengesloten vrije tijd. Dus bijvoorbeeld een (halve) dag extra vrij, of alle lesdagen korter. Als dat niet kan, dan willen de meeste leerlingen graag veel pauzetijd. Hersenonderzoek heeft aangetoond dat leerlingen in de puberteit tussen 8:00 en 10:00 beginnen met een maximaal leerrendement van 90%, dit neemt zonder pauzes af met dezelfde snelheid als de gegeven lineaire grafiek.

WEBSITE

Paul Eduard Lepoeter

HET INTRIGERENDE LEVEN VAN EEN GEDREVEN WISKUNDELERAAR

Kees Lepoeter wist vrijwel niets van Paul Eduard Lepoeter, behalve dat hij voorkomt in de stamboom die zijn vader opstelde in de jaren zestig. Hierin is alleen opgenomen dat Paul Eduard destijds ongehuwd was en werkte als leraar in Wassenaar. Ook was hem bekend dat er ene Lepoeter wiskundeboeken had geschreven met een zekere Bos, was dit dezelfde man als zijn onbekende familielid? Hij startte een onderzoek en zoals Kees Lepoeter zelf schrijft: 'Uiteindelijk ontrafelde zich het intrigerende levensverhaal van een bijzonder persoon, een verhaal dat de moeite waard bleek om op te schrijven, op



z'n minst om ervoor te zorgen dat de bijzondere persoon Paul Lepoeter niet in de vergetelheid raakt. Ik wil dit verhaal dan ook graag neerzetten als een postuum eerbetoon aan Paul Eduard Lepoeter.'

U vindt deze prachtige biografie op *vakbladeuclides.nl/893lepoeter*

KLEINTJE DIDACTIEK

NOTATIE

Doelgroep: havo – vwo

Hoe bereik je dat leerlingen op havo en vwo de notatie gebruiken die je wilt? Hierbij wat tips:

- maak met de sectie een overzicht van de belangrijkste notaties, zie bijvoorbeeld *vakbladeuclides.nl/893boels1*. Dit betekent dat in elke klas en in elk leerjaar dezelfde notatie wordt aangeleerd. Dit scheelt veel discussie in de lessen. Mijn collega heeft een handleiding gemaakt waarin voor vrijwel elke soort vraag staat wat leerlingen van de grafische rekenmachine precies moeten noteren, zie figuur 1. De complete handleiding vindt u op *vakbladeuclides.nl/893boels2*;
- maak een opgave op het bord en schrijf erbij hoeveel punten elke stap oplevert en geef apart aan hoeveel punten eraf gaan als je onderdelen verkeerd noteert;
- laat leerlingen een opgave op het bord maken en bespreek hoeveel punten deze opgave zou krijgen van een vooraf gegeven aantal punten;
- geef bij het nakijken van de toets alle punten als de opgave correct is opgelost. Schrijf er vervolgens apart bij hoeveel punten eraf gaan door notatie (bijvoorbeeld: -1). Noteer ook het puntenaantal bovenaan de toets als: totaal – notatiefouten = score;
- trek niet meer dan 10% van de maximumscore af voor notatie en verdeel deze over verschillende notatiefouten (dus niet 6 punten eraf als een leerling zes keer P(...) vergeet). Zo voorkom je dat iemand die de stof goed beheerst, een te laag cijfer krijgt en dat je dus geen onderscheid meer maakt tussen stof niet beheersen en niet goed noteren;
- belangrijk is dat leerlingen het nut gaan inzien van een goede notatie omdat het hen helpt om overzicht te houden. Wees daarom duidelijk in je communicatie en straf ze niet onnodig af.

Tot slot nog een relativering over notatie. We weten allemaal dat in de wiskundegeschiedenis notaties nog wel eens veranderd zijn (ons huidige wortelteken bestaat nog maar 500 jaar) en dat juist genieën vaak nieuwe notaties uitvinden.

Lonneke Boels

6 Het berekenen van snijpunten met de x-as	Wat moet je doen	Uitwerking in je schrift
	Bereken de snijpunten van de de functie $f(x) = x^2 + 30x$ met de x-as 1 Voer de formules in. (GR notaties gebruiken) 2 Venster instellen. (Alle bijzonderheden moeten op het scherm te zien zijn) 3 Schets maken 3 Bepaal de snijpunten met de x-as.	Voer in $y_1 = x$^2 + 30x of $y_1 = x^2 + 30x$ Venster [-35,5] x [-250,50] [schets] [CALC] zero geeft x = -30 en y = 0 x = 0 en y = 0 Dus de snijpunten zijn (-30,0) en (0,0).

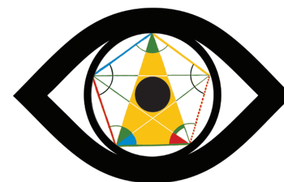
figuur 1 Voorbeeld van eisen aan notatie en uitwerking. Gemaakt door Toos Meijer van het Christelijk Lyceum in Delft (CLD) in overleg met de sectie wiskunde

GETUIGEN

MARTEN TOONDER

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

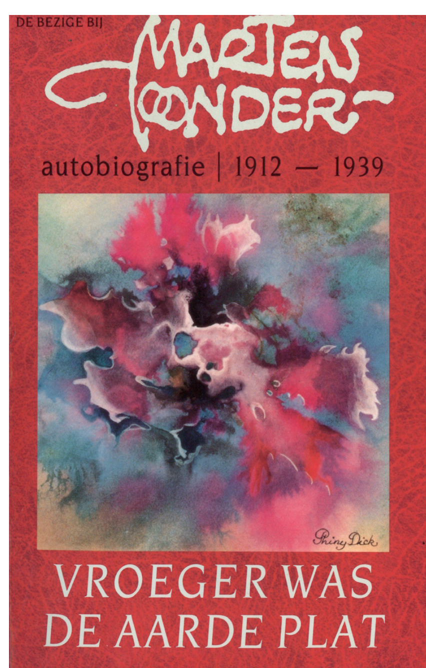


Een persoon die ten onrechte geen enkele rol speelt in de geschiedenis van het wiskundeonderwijs is professor Joachim Sickbok. Helemaal onbegrijpelijk is dat niet. Een van de redenen dat hem die eer vooralsnog onthouden wordt, is dat hij niet bestaat. Dat is een vervelend euvel, dat echter menig ander die wél figureert in de geschiedenisboeken niet van grootheid heeft weten te weerhouden. Men denke slechts aan Nicolas Bourbaki of romanfiguren als dokter Frankenstein.

Professor Sickbok is, ondanks het geschetste bezwaar, bij uitstek een persoon die een plek verdient in een geschiedenis van het wiskundeonderwijs. Indien er namelijk iemand prachtig kan illustreren hoeveel impact het wiskundeonderwijs op een weinig geïnteresseerde HBS'er tijdens het interbellum had, dan is het deze hoogleraar.

De schepper van deze bijzondere geleerde was de schrijver en striptekenaar Marten Toonder (1912-2005). Hij was een van de eerste studenten aan de literair-economische richting van de HBS. In het eerste deel van zijn autobiografie (1992) beschrijft hij tamelijk openhartig dat hij een luie leerling was, die voor deze nieuwe richting had gekozen omdat hij dan minder hoefde te werken. Wiskunde, natuurkunde en scheikunde lagen hem minder, en hij was eigenlijk vooral bezig met indruk te maken op zijn buurmeisje - niet onsuccesvol overigens, want hij is uiteindelijk met haar gehuwd.

De HBS-A was in het leven geroepen als een alternatief op het zware HBS-programma (vanaf dat moment HBS-B), waarin de exacte wetenschappen de boventoon voerden. De uitval op de HBS was groot: tot wel vijftig procent van de leerlingen doubleerde of verliet vroegtijdig de school. Diverse onderwijsonderzoekers en docenten waarschuwden tijdens het interbellum voor het zware programma, dat voor (te?) weinig leerlingen haalbaar leek te zijn. Ook door voorstanders van het zware programma werd er gewaarschuwd voor al te rigide toetsing, waarbij leraren wellicht in de valkuil vielen om standaard het kwart minst presterende leerlingen af te schrijven.



figuur 1 Titelblad van het eerste deel van de autobiografie van Marten Toonder, 1992

Toonder genoot van zijn tijd aan de HBS. Hij moet toch wel zeer getalenteerd zijn geweest, want hij kwam met een combinatie van een eindsprint en een beetje geluk door het eindexamen heen, en ging met zijn vader varen om te bedenken wat hij nu eigenlijk wilde gaan doen. Via een aantal baantjes als bureauredacteur en striptekenaar voor tijdschriften, werd hij uiteindelijk een zeer succesvolle stripauteur, die in het bijzonder met de verhalen van Tom Poes en heer Olivier B. Bommel grootse successen beleefde.

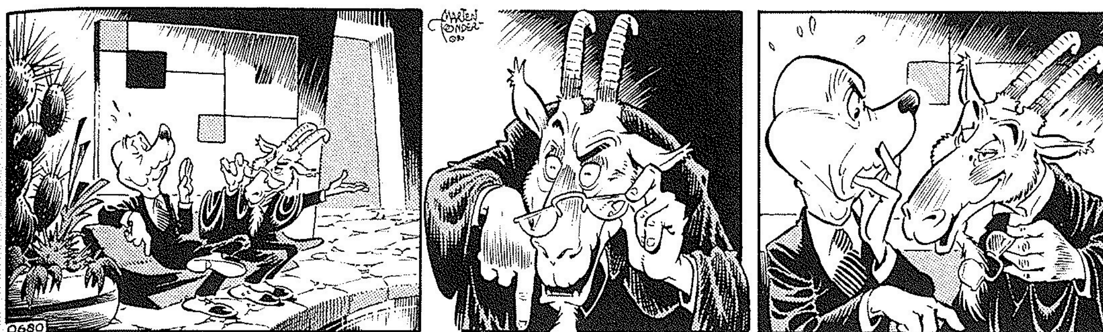
De HBS bepaalde voor Toonder zijn beeld van de exacte wetenschappen. Wis- en natuurkunde hadden niet zijn interesse, en hij worstelde met de concepten die zijn docenten hem probeerden op te dringen. De confrontatie met de methodische aanpak van zijn docenten moet zijn beeld van wetenschappers diepgaand hebben beïnvloed. Wetenschappers waren in Toonders verhalen één van twee – óf zij waren naïeve, wat wereldvreemde figuren die zich onbewust waren van het grote onheil dat hun vindingen

veroorzaakten. Zij bleven domweg bezig hun nieuwsgierigheid te bevredigen in hun onderzoekingen, óf zij waren maniakale genieën, zoals professor Sickbok, die uit waren op werelddominantie. In alle gevallen worden zij karikaturaal neergezet. Toonders wetenschappers begrijpen de wereld niet echt, maar denken in strikte causaliteiten die hen af en toe, min of meer per ongeluk, een glimpje van de meer magische realiteit van Toonder doen opvangen, en daar dan dingen in de war sturen. Hij knipoogt naar zijn eigen realiteit in de titel van het eerste deel van zijn biografie: *Vroeger was de aarde plat*. Het lijkt wel alsof Toonder met het beeld dat hij van wetenschappers neerzet, bewust of onbewust, achteraf afrekent met zijn docenten wiskunde, natuurkunde en scheikunde aan de HBS.



figuur 2 Afbeelding uit *De Minionen* van Marten Toonder, krantenstrip 1980. Copyright Stichting Toonder Auteursrecht

In *De tijwisselaar* laat Toonder bijvoorbeeld een aantal geleerden een eiland aandoen dat bewoond wordt door een kleine gemeenschap die groot vertrouwen stelt in de werkzaamheden van een functionaris die lokaal bekend staat als 'de tijwisselaar'. Hij is verantwoordelijk voor het wisselen van de getijden, en dat doet hij door cirkels te tekenen in het zand en spreuken te prevelen. Na lezing van een boek waarin een wetenschappelijke verklaring



figuur 3 Pagina uit *De Minionen* van Marten Toonder, krantenstrip 1980. Copyright Stichting Toonder Auteursrecht

Hij bracht de hoogleraar naar een sfeervolle spreekkamer, waar het afluisterapparaatje verborgen was in een verantwoord schilderij.
'Wat bedoelt u met teruggaan in de tijd? vroeg hij.
'Veel,' zei de geleerde. 'Maar ik zal kort zijn. Al jaren ben ik bezig met een formule, die een einde zal maken aan alle formules, en tenslotte heb ik hem gevonden. Ik ben er in geslaagd de wortel te trekken uit min één!'
De secretaris hief een hand op en snoof misprijzend.
'Dat kan niet,' sprak hij. 'Iedereen, die zijn wiskunde kent, weet dat die wortel onmogelijk is. Het zou een eh... zwart gat opleveren.'
'Aha!' riep Sickbock uit. 'Daar heb ik u! De astronomen zullen u kunnen vertellen, dat het zwarte gat echt bestáát. En wàt is het? Teruggaan in de tijd, vriend! Dus dat kàn!'
Hij nam zijn lorgnet af en vervolgde met holle stem: 'Dat kan inderdaad. Hebt u wel eens van ionen gehoord? En van fotonen? De laatste gaan vlugger dan de tijd. Maar ik; ik heb minionen ontdekt, die teruggaan in de tijd. En met behulp daarvan kan ik een zogenaamde tijdmachine bouwen.'
Hij zweeg even om het gehoorde te laten inzinken, en toen plooide zijn gelaat zich tot een innemende glimlach.
'Alleen heb ik daarvoor wat geld nodig,' besloot hij. 'Een paar miljoen zal genoeg zijn.'

wordt gegeven van eb en vloed, legt de tijwisselaar zijn ambt neer. Prompt wordt er door de geleerden onverklaarbare seismische activiteit waargenomen en begint het eiland langzaam in zee te zakken. Ondanks dat de bewoners een appèl doen op de tijwisselaar, blijft deze bij zijn standpunt dat eb en vloed worden veroorzaakt door de beweging van de maan en dat het water dus vanzelf zal omkeren. De bewoners van het eiland worden gered door het schip met de geleerden. Heel handig laat Toonder de 'waarheid' in het midden: de geleerden en de eilandbewoners blijven bij hun standpunten; alleen heer Bommel is in vertwijfeling.
In *De Minionen* was het professor Sickbock die interfereerde met de realiteit, door een tijdmachine te bouwen. De tijdreisparadoxen die hij daarmee creëerde vormen het thema van het verhaal. De technologie die Sickbock ontwierp, was gebaseerd op het feit dat de geleerde erin was geslaagd om de wortel te trekken uit -1. Op ingenieuze wijze weefde Toonder de onmogelijkheid van een reële wortel in het verhaal. De worteltrekking en de toepassing daarvan in de oplossing van vierkantsvergelijkingen was een van de onderwerpen die de HBS-A-leerlingen sowieso moesten kennen. Dat er bij een negatieve discriminant geen oplossingen waren, leerden zij ook. Toonder had dit zo goed in zijn oren geknoopt dat hij er vanuit durfde te gaan dat het voor zijn lezers anno 1980 ook prettig herkenbaar zou zijn, en verwerkte het in zijn verhaal. In het hoofd van Marten Toonder had de wortel van -1 zich verenigd met het natuurwetenschappelijk fenomeen van een zwart gat, en daarmee liet hij Sickbock een onnavolgbare redenering afsteken tegen een van zijn potentiële geldschieters. De onnavolgbaarheid van de redeneringen was waarschijnlijk ook een van de dingen die de jonge Toonder van zijn wis- en natuurkundelessen is bijgebleven.

Als er één Nederlandse auteur is die laat zien dat wij als docenten een enorme invloed hebben op zelfs onze meest recalcitrante en minst geïnteresseerde leerlingen, dan is het Marten Toonder. Mocht u daar nog over twijfelen, leest u dan de hilarische wederwaardigheden van professor doctor Joachim Sickbock. Dan ziet u meteen dat dat niet per se tot teleurstellende resultaten hoeft te leiden: zelfs als we als docent compleet falen, brengen we (soms toch) iets moois tot stand! Een bemoedigende gedachte.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

DE TARP!

Patrick Oosterhuis

Het is vakantie. Eindelijk, de laatste weken waren chaos. Er was geen lijn meer in de klas. De paralellen van de tafeltjes en de bijbehorende loodlijnen waren zoek. De driehoeksverhouding tussen de lesstof, de leerling en de docent was weg. In de maanden ervoor kon een Hamiltoncircuit door de klas alle lastige leerlingen met elkaar verbinden. Maar dit was er niet meer, zelfs niet als pseudo. Maar was het wel chaos in de groep? Zat er toch niet ergens een regressielijn verborgen die leidde naar een antwoord? Jazeker, de vakantie.

En nu de eerste week van de vakantie er alweer op zit, beginnen mijn deelverzamelingen leger en leger te raken. De namen bij de coördinaten van de tafeltjes beginnen te verdwijnen. Het worden weer tafeltjes. Klassen worden weer lege kubussen en heel langzaam komt de onderzoeker al weer in me naar boven. Zo liggend en dagdromend onder een tarp in de tuin is het bij dertig graden aangenaam. In de tarp boven me zie ik de bissectrices en de middelloodlijnen in het doek staan. Ik zie de driehoeken en hun congruenties. De Z-hoeken die ontstaan door de aanspanlijnen en de driehoeksverhouding tussen mijn huis, de tuin en de kersenboom. Zou ik dit kunnen gebruiken in mijn lessen? Bij hoofdstuk 8 was het onduidelijk. Maar een tarp zou ik kunnen gebruiken. Waar dat simpele lapje stof al niet goed voor was.

Midden, parallellijnen en de evenwijdigheid; het flitste allemaal door mijn hoofd heen. Sinussen en cosinussen, ze waren er allemaal. De deelverzamelingen voor het volgende jaar begonnen zich weer te vullen. En net voor de limiet in zicht kwam en de differentiaal het hoogtepunt benaderde, maakte mijn vrouw me wakker: 'Gaat het nog een beetje met je, lieverd?'
Oh gelukkig; ik heb nog enkele weken onder mijn prachtige tarp.

Over de auteur

Patrick Oosterhuis is afgestudeerd bouwkundig ingenieur HTS Groningen 1988. Hij studeert nu aan de wiskunde lerarenopleiding NHL in Groningen. E-mailadres: *p.oosterhuis@gmail.com*

WwF FINANCIERT PROJECT IN KENIA

Peter en Joke Van Daalen

LOPIDING GIRLS SCHOOL

'Good morning, girls' - 'Good morning, headmistress' scanderen de 200 meisjes van de Lopiding Girls School. Er heerst hier strakke discipline… In de felle Keniaanse ochtendzon luisteren de meisjes in uniform aandachtig en doodstil naar wat de headmistress hen te zeggen heeft: er zijn bezoekers uit Holland. En die zijn gekomen met een verrassing voor de school.

Vorig jaar maakten we met deze school kennis, na afronding van een ontwikkelingsproject in de buurt. De gebouwen zagen er voor deze straatarme regio redelijk uit: lokalen van grijze betonsegmenten, eenvoudige voorzieningen, stromend water. Maar uit het gesprek met de schoolleiding kwam naar voren dat het tekort aan lesmateriaal een groot probleem is. We hebben toen de situatie met betrekking tot wiskunde in kaart gebracht samen met schoolleiding en wiskundeleraren. We hebben foto's gemaakt van het wiskundemateriaal dat gebruikt werd. En na het indienen van het aanvraagformulier werd na enige tijd tot onze vreugde de gehele aanvraag gehonoreerd! Een geweldig bedrag van 2600 euro werd toegezegd voor deze school.

En dan komt op die aprilmorgen het moment om het bedrag (symbolisch) te gaan overhandigen. Prachtig om mee te maken! De vorige dag hebben we op een groot karton de bedragen in dollars en in Keniaanse shillings vermeld. Uiteraard inclusief logo en naam van het 'World Maths Fund'. Geduldig wachten we onder de veranda tot de headmistress ons heeft geïntroduceerd. Het voelt wat neokoloniaal om daar zo in de schaduw te zitten, maar het is prachtig om al die bruine meiden daar in hun kleurige uniformen verwachtingsvol te zien kijken.
Vervolgens houdt Peter een korte toespraak en dan wordt het geldbedrag plechtig aan de schoolleiding overgedragen. Het gejuich barst los als men ziet welk bedrag er is toegezegd. We maken de nodige foto's, we worden uitgebreid toegezongen en er wordt afgesloten met een dankwoord en een gezamenlijk gebed. Als we even later wegrijden klinkt er weer een lied en worden we enthousiast uitgezwaaid.







Inmiddels ziet Lopiding School uit naar de komst van de bestelde materialen. En we sturen graag de bedankbrief mee die we deze week ontvingen. Bij de daarin uitgesproken dank sluiten wij ons van harte aan. Wiskundefonds: hartelijk bedankt!

LOPIDING GIRLS SECONDARY SCHOOL
P.O BOX 77-30503
LOKICHOGGIO.

7TH September

Dear Sir,

We sincerely appreciate your funding towards purchasing of mathematics equipments and text books in our school. We received the money in august the year 2013

School enrolment in the year 2010 was nineteen students. Currently, our school has a population of two hundred and eighteen students with a double stream class for grade one and single stream for grades two, three and four. The teaching staff comprises of four male and four female teachers. The non-teaching staff comprise of six subordinate staff members and one Accounts clerk.

The school has buildings comprise of one administration block, six classrooms, a dining hall and two dormitories.

The school was established as a peace initiative between the worrying Toposa and Turkana communities after a long period of cattle rustling. The peace initiative was engineered by Arid land and UNDP.

The school is located in Turkana county and Turkana west sub county, Lokichoggio division and Lopiding sub-division.

The main objective of establishing the school is to provide quality Education in nurturing girl child of Turkana, Toposa and karamajong' communities. Our school vision is to excel in provision of quality education in a conducive learning environment for individual and national development. As a school, our main mission is to promote peace and girl child development for national development.

Yours faithfully
Anna Echoto, Headmistress

Over de auteur

Peter van Daalen - gepensioneerd na 40 jaar leraar Engels - doet al een aantal jaren samen met zijn vrouw een project in Loki, Kenia. Aan een Bijbelschool geeft hij daar lessen en als gevolg van contacten met ontwikkelingswerkers ter plaatse kwam hij op het spoor van deze meisjesschool in de buurt van Loki.

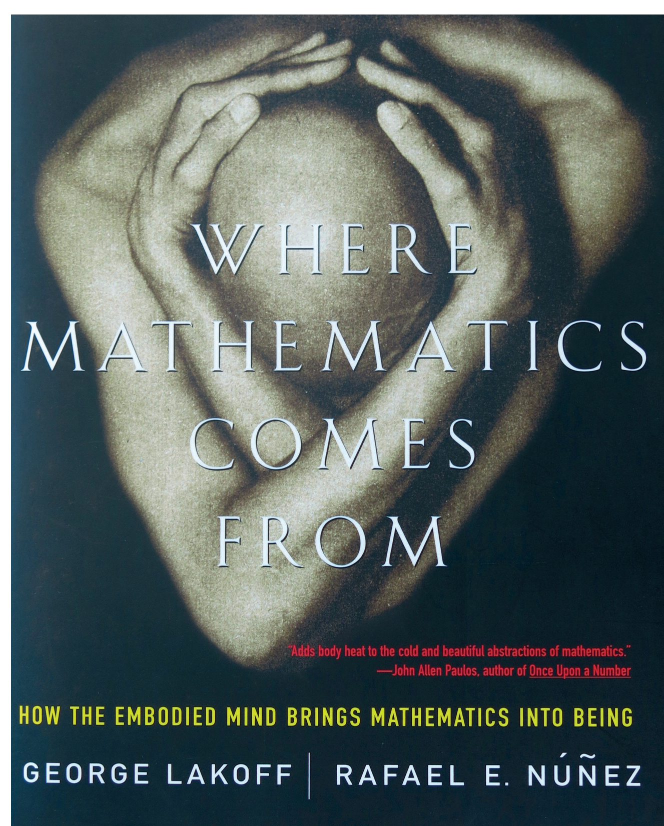
HET FIZIER GERICHT OP…

RAFAEL NÚÑEZ

Michiel Doorman

In de rubriek Fizier belicht iedere keer een medewerker van het Freudenthal Instituut een actueel thema of project uit zijn of haar werk. Zo wordt een brug geslagen tussen het (internationale) onderzoeks- en ontwikkelingsveld en de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering vertelt Michiel Doorman over de rol die lichamelijk geheugen en fysiek handelen in wiskundeonderwijs kunnen spelen.





Ons lichamelijk geheugen is heel sterk. Je merkt dat bijvoorbeeld als je na jaren weer eens schaatsen onderbindt. Zonder erbij na te denken, blijk je nog steeds de kunst te beheersen. Zou het mogelijk zijn om die capaciteit ook in het onderwijs te benutten? Op 17 september j.l. verzorgde Rafael Núñez de Freudenthal-lezing aan de Universiteit Utrecht: 'In what sense is Embodied Cognition relevant for Mathematics Education?'

Eerst is er natuurlijk de vraag wat *embodied cognition* eigenlijk inhoudt. De woorden *body* en *cognition* suggereren dat lichaam en kennis verwerven iets met elkaar te maken hebben. Mijn associatie was het wiskundewerklokaal, waarvoor in de jaren negentig veel reclame werd gemaakt. Een lokaal waarin leerlingen konden knippen, plakken, vouwen, hout bewerken, perspectief tekenen, enzovoort. Dit fröbelen, dat een ongerichte en speelse connotatie heeft, paste niet in het zogenaamd efficiënte en resultaatgerichte onderwijs dat men graag ziet. Het wiskundewerklokaal was snel uit de aandacht verdwenen. Helaas! Zou Núñez nu toch een theoretische onderbouwing weten te geven voor het belang van fysieke activiteiten?

Núñez begon zijn verhaal met het vak wiskunde. Wat maakt wiskunde speciaal? Wiskunde is een abstract systeem dat niet direct waar te nemen is met onze zintuigen. Daarin verschilt het van andere disciplines. Bovendien bestaat het uit allerlei conventies die moeilijk te motiveren zijn, zoals –2 x –2 = +4, 0,9999…= 1 en 0! = 1. Niets in het universum ondersteunt dergelijke uitspraken. Volgens Núñez is het onze taak om te begrijpen waar dergelijke conventies vandaan komen. Zijn belangrijkste stelling is dat wiskunde een levend vak is, dat in een cultuur wordt opgebouwd. Dus *embodiment* gaat volgens hem om meer dan het concreet en tastbaar maken van begrippen.

Núñez illustreerde dit aan de hand van de getallenlijn. Neurologisch onderzoek, o.a. van zuiderbuur Dehaene[1], suggereert dat onze vaardigheid om getallen te zien als locaties op een lijn een aangeboren capaciteit van onze hersenen is. We zouden allemaal 'in ons hoofd' een getallenlijn hebben die van links naar rechts loopt en allerlei eigenschappen heeft. Dit fenomeen daagde Núñez uit. Hoe oud is die getallenlijn eigenlijk? Waar komt die vandaan en waarvoor was het een oplossing? Historisch onderzoek toont dat in Babylonische kleitabletten wel wiskundige diagrammen te vinden zijn, maar geen getallenlijn. En dat geldt voor alle wiskundige teksten tot aan Descartes. Aan hem hebben we ten slotte de cartesische coördinaten te danken, dus daar zullen we wel een getallenlijn vinden. Maar wat blijkt? Zelfs bij Descartes is geen lijn te vinden met daarop specifieke posities voor getallen. Het eerste voorbeeld vindt Núñez bij John Wallis (1685)

die een getallenlijn gebruikt om te visualiseren dat +5 – 2 = +3. Kennelijk is die getallenlijn niet zo intuïtief en vanzelfsprekend. Vervolgens onderzocht Núñez verschillende (primitieve) culturen om te analyseren hoe zij getallen representeren. Een onderzoek vond plaats met Yupno-indianen op Papua Nieuw-Guinea. Hen werd een stok voorgehouden met de aanwijzing dat de uiteinden ieder een getal representeerden. Zij moesten vervolgens een getal daartussen op de stok aanwijzen. Dit bleek voor hen een onmogelijke taak. Bij elke vraag bleven ze alleen de uiteinden aanwijzen. Kennelijk konden ze zich niet voorstellen dat tussenliggende locaties op de stok ook een getal konden representeren. De moraal van Núñez is dat de getallenlijn een recente uitvinding is en binnen culturen vorm en nut heeft gekregen. Wij moeten ons bewust zijn dat onderwijs hierop voortbouwt. En dit geldt natuurlijk niet alleen voor de getallenlijn, maar voor vele concepten en termen die we in het onderwijs gebruiken. Wie meer wil weten over de manier waarop universele wiskundige begrippen en technieken het resultaat zijn van menselijke activiteiten, kan het boek van Lakoff en Núñez[2] lezen.

Zijn het wiskundewerklokaal en het fröbelen nu in ere hersteld? Eigenlijk niet. Het belang van embodiment gaat bij Núñez veel verder dan alleen het benadrukken van betekenisvol fysiek handelen. Het gaat ook om de manier waarop wiskunde in onze cultuur geworteld is en dat de betekenis van handelingen, concepten en termen cultuurafhankelijk zijn. Desondanks blijven handelingen onmisbaar. Laat uw leerlingen in de klas eens op gelijke afstand van een tafel en een lokaalwand staan. Eerst een paar losse posities, en dan langzaam de gaten opvullen. Zo kunnen ze zelf ervaren wat ‘op gelijke afstand van een lijn en punt’ betekent en daarmee zullen ze die parabool-constructie niet snel vergeten. Het duurt wel even voordat het wandelen over een virtuele conflictlijn net zo gemakkelijk gaat als schaatsen. Hoewel, dat laatste ging vast ook niet direct vanzelf.

Noten

[1] Stanislas Dehaene is hoogleraar aan het Collège de France en directeur van het INSERM UNit 562, ‘Cognitive Neuroimaging’ sinds 1989. Zijn specialisaties zijn numerieke cognitie, getalbegrip en hersenfuncties. Bron: Wikipedia

[2] Lakoff, G., & Núñez, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books.

Over de auteur

Michiel Doorman is bij het Freudenthal Instituut betrokken bij verschillende (internationale) projecten, zoals MaSciL (Mathematics and Science for Life) en de organisatie van de Nationale Wiskunde Dagen. E-mailadres: *m.doorman@uu.nl*



MEDEDELING

NLT CONFERENTIE 6 FEBRUARI 2014

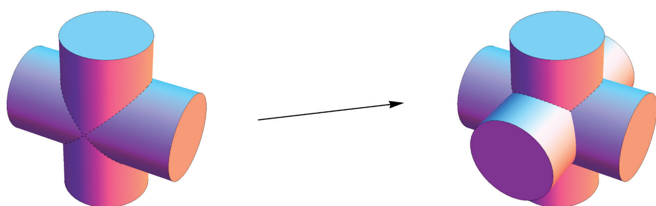
Op 6 februari vindt de jaarlijkse landelijke nlt-conferentie plaats in Bilderberg conferentieoord 't Speulderbos in Garderen. Dit jaar is het thema ‘Bruggen slaan met nlt’. De conferentie staat in het teken van interdisciplinariteit. Naast de vertrouwde werkgroepen over modules is er onder andere aandacht voor interdisciplinariteit in de modules, excellentie-onderwijs en onderzoek naar het nut van nlt onder examenleerlingen. De hoofdlezing wordt verzorgd door prof.dr.ir. Peter-Paul Verbeek, hoogleraar Geschiedenis en filosofie van natuurwetenschappen en techniek aan Universiteit Twente. De conferentie wordt georganiseerd door het Landelijk Coördinatiepunt NLT en SLO. U kunt zich vanaf 1 november opgeven via *www.betavak-nlt.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

EEN EI HOORT ERBIJ – DEEL II: KLOOTBAL

In het vorige nummer van Euclides heeft Jacques Jansen onder andere laten zien hoe de inhoud van de doorsnijding van twee cilinders uitgerekend kan worden. In dit artikel gaat hij nog een stap verder, naar de doorsnijding van drie cilinders. Een toepassing hiervan is terug te vinden in de kloot, een bal die gebruikt wordt bij het klootschieten.



figuur 1 Van twee snijdende cilinders naar drie

Klootbal

In het oosten van het land is klootschieten een veel gespeeld spel. De bal die men hierbij gebruikt, noemt men een kloot of klootbal. Bij het klootschieten rolt men de bal over een parcours. Elke rol noemt men een schot. De bedoeling is om met een minimaal aantal schoten het parcours af te leggen.

We bekijken de bal nader. De bal is van hout gemaakt, maar is verzwaard met lood. Zie figuur 2.

Van een kubusvormig stuk hout wordt een ronde vorm gemaakt. De kloot wordt daarna driemaal doorboord om gaten voor het lood te maken. De assen van de cilindervormige gaten moeten onderling loodrecht op elkaar staan. Vervolgens worden de gaten met lood gevuld. Hiervoor worden vijf van de zes gaten afgedekt. Als de bal op de draaibank rond genoeg is gemaakt, volgt een laklaagje. In figuur 3 zien we het loden deel van de bal.

Het loden deel van de klootbal bestaat dus uit drie cilinders die elkaar snijden. Het is lastig om een voorstelling te maken van het gemeenschappelijke stuk van de cilinders. Deze doorsnede is een kussentje[1] dat door een derde cilinder wordt doorboord, zie figuur 4.[2]

Aan de bovenkant zie je van de doorsnede een vierkant met omgeschreven cirkel, zie figuur 5. De cirkel is het aanzicht van de cilinder in de richting van zijn as.

De straal van die cirkel is gelijk aan de straal van de cilinder; we noemen deze *r*. De zijde van het vierkant is dan $2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}$ of $\sqrt{2}\cdot r$. De doorsnede van de drie cilinders is voor te stellen als een kubus met ribbelengte $\sqrt{2}\cdot r$ en met op elk grensvlak een gewelfje, zie figuur 6. In figuur 7 nog een tekening van de doorsnede, gemaakt door een leerling, Sem Mulder. Hij heeft hiervoor de drie cilinders parametrisch beschreven.

Inhoud van de doorsnede

De kern van de doorsnede is de genoemde kubus met inhoud $(\sqrt{2}\cdot r)^3 = 2\sqrt{2}\cdot r^3$. Nu nog de inhoud van zo'n gewelfje, met behulp van een integraal, uitrekenen. De afstand van de top van het gewelfje tot het middelpunt van de kubus is r. De afstand van het vierkant grondvlak van het gewelfje tot het middelpunt van de kubus is helft van de lengte van de zijde van de kubus, dus $\frac{r}{\sqrt{2}}$. Het gewelfje kunnen we opvatten als een opeenstapeling van heel dunne rechthoekige plakjes van dikte Δh en zijde $2\sqrt{r^2 - h^2}$. Gaat u dat met behulp van een cirkel maar na. Nu we de integrand weten kunnen we de integraal opstellen: Inhoud gewelfje = $\int_{r/\sqrt{2}}^{r} (2\sqrt{r^2-h^2})^2\,dh$.

De volledige doorsnede bestaat uit een kubus en zes gewelfjes, hiervan kunnen we nu ook de inhoud uitrekenen.

Inhoud doorsnijding =

$$2\sqrt{2}\cdot r^3 + 6\cdot \int_{r/\sqrt{2}}^{r} (2\sqrt{r^2-h^2})^2\,dh = (16-8\sqrt{2})r^3.$$

Dit is natuurlijk minder dan de inhoud van de doorsnede van twee cilinders. Wellicht is het een uitdaging om de inhoud van de doorsnede te berekenen zonder te integreren. De doorsnede is namelijk ook samen te stellen uit zes gelijke delen die elkaar in het midden treffen. Probeert u maar!



figuur 2 Een klootbal

Totale inhoud lood

Bij een klootbal kun je je afvragen hoeveel ruimte door het lood in beslag wordt genomen. Dan moeten we ook de kapjes op de cilinders meerekenen, die onderdeel van het boloppervlak zijn. Deze kapjes zijn goed te zien bij de gebruikte kloot in figuur 2. Zo'n kapje is op te vatten als een bolsegment waarvan de inhoud wordt gegeven door de formule $I_{\text{bolsegment}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$. In figuur 8 is een deel van het vooraanzicht van de bol met één cilinder getekend. De as van deze cilinder gaat door het midden van de bol. De lengte $MC = h$ geeft de hoogte van het bolsegment aan. Verder is R de straal van de bol. Leerlingen kunnen we uitdagen om zo'n formule zelf af te leiden. Maar dan lopen we nog tegen een lastig probleem aan. Hoe kunnen we met behulp van de inhoud van de kapjes, de inhoud van de cilinders en de inhoud van de doorsnijding van de cilinders uitrekenen wat nu de totale inhoud van het lood is? Hier liep ik zelf vast en riep daarom hulp in van Aad Goddijn.[3] Zijn advies was: gebruik verzamelingenleer. Dat bleek een briljante tip! Er geldt voor de vereniging van drie verzamelingen C_1, C_2 en C_3 de volgende regel:

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = C_1 + C_2 + C_3 - (C_1 \cap C_2) - (C_1 \cap C_3) - (C_2 \cap C_3) + (C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

Deze regel kunt u zelf afleiden met behulp van het Venndiagram uit figuur 9.

Een cilinder kunnen we opvatten als een verzameling. Met C_1, C_2 en C_3 bedoelen we nu dus de cilinders, waarbij we de inhoud van een (deel van) een cilinder aanduiden met de functie I. Omdat de drie cilinders dezelfde hoogte en stralen hebben, is de inhoud van elke cilinder hetzelfde en is ook de inhoud van de doorsnede van twee cilinders steeds hetzelfde. Als we nu bovenstaande regel toepassen, dan krijgen we:

$$I(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 3I(C_1) - 3I(C_1 \cap C_2) + I(C_1 \cap C_2 \cap C_3).$$

De straal van een cilinder hadden we al eerder r genoemd en de hoogte van een cilinder is $2R - 2h$, met R en h gedefinieerd zoals eerder bij het kapje.
Zoals we gezien hebben in het vorige nummer van *Euclides*, is de inhoud van de doorsnede van twee cilinders gelijk aan $\frac{16}{3}r^3$.

We hebben al berekend dat de inhoud van de doorsnede van drie cilinders $(16-8\sqrt{2})r^3$ is. We vullen dat in:

Inhoud lood= $2\pi h^2(3R-h)+3(2R-2h)\pi r^2-16r^3+(16-8\sqrt{2})r^3$

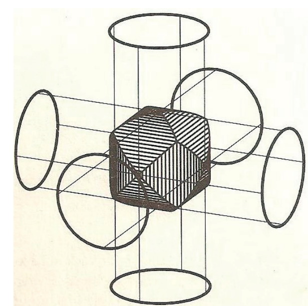
Dus Inhoud lood= $2\pi h^2(3R-h)+6\pi(R-h)r^2-8\sqrt{2}\cdot r^3$

Rekenvoorbeeld

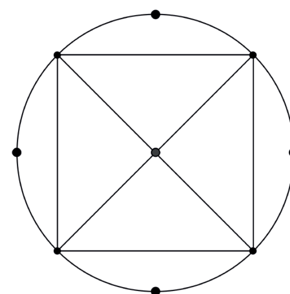
We nemen als voorbeeld een straatkloot: 'Een straatkloot wordt meestal gemaakt van hardere houtsoorten en kunststoffen in verband met de snelle slijtage. Veel mensen gebruiken kloten van rond de 75 millimeter en doorboord met gaten van 13 tot 16 millimeter zodat het gewicht rond de 400 gram komt'.[4] Bij deze informatie geldt: $r = 8$ mm, $R = 37{,}5$ mm. Voor h nemen we 0,9 mm.



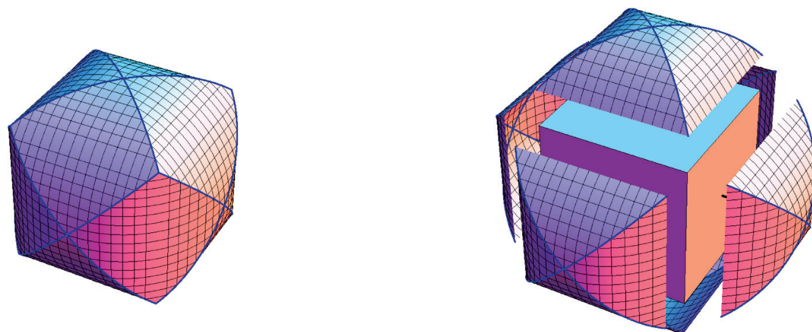
figuur 3 Lood in de binnenkant van een klootbal



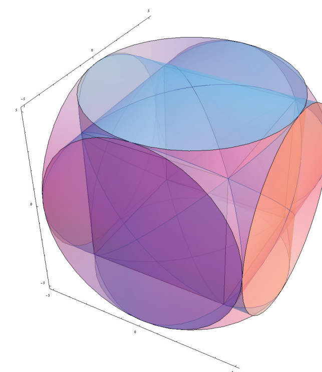
figuur 4



figuur 5

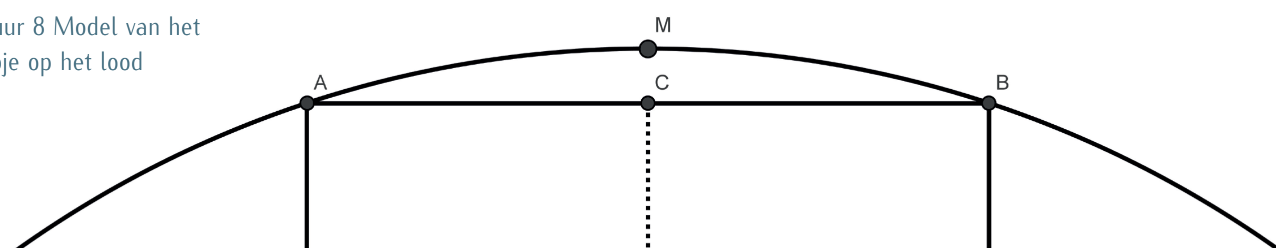


figuur 6 De doorsnede is een kubus met gewelfjes



figuur 7 Tekening van de doorsnede door Sem Mulder

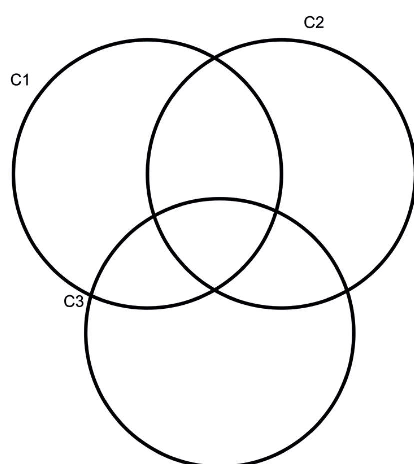
figuur 8 Model van het kapje op het lood



Deze getallen vullen we in de bol- en loodformules in en we krijgen: $I_{bol} = 220893\ \text{mm}^3$ en $I_{lood} = 38929\ \text{mm}^3$. Dat betekent dat het lood bijna 18% van de straatkloot in beslag neemt.

Misschien bent u nu enthousiast geworden om met uw leerlingen te gaan klootschieten. Het is, met de door lood verzwaarde houten bal, wel oppassen met gooien. Ik wens u veel succes met klootschieten en wellicht komt u tijdens het spel nog tot hele andere wiskundige problemen of ideeën.

figuur 9 Venn-diagram dat de doorsnede van drie verzamelingen C_1, C_2 en C_3 illustreert.



Noten en referenties

[1] Een doorsnede van twee cilinders noemen we een kussentje, zie vorig artikel in *Euclides*, *89*(2), pagina 27-29.

[2] Wells, D. (1991). *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*. Amsterdam: Bert Bakker. Figuur 4 is afkomstig uit dit boek.

[3] Aad Goddijn is verbonden aan het Freudenthal Instituut in Utrecht.

[4] Zie *www.RodeHerten.nl/kloot_maken.htm*

Veel dank aan Wil Kortsmit voor het maken van de figuren 1 en 6.

RECTIFICATIE

In het vorige nummer stond in het artikel van Jacques Jansen twee hinderlijke fouten. De integraal onderaan pagina 27 moet $2\cdot\int_0^{\sqrt{4{,}5}} \pi(9-2x^2)dx$ zijn. De inhoud van het kussentje K op pagina 29 moet volgens het Principe van Cavalieri $\frac{4}{\pi}$ maal de inhoud van een bol met straal r zijn en dat geeft $\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{16}{3}\cdot r^3$.

Over de auteur

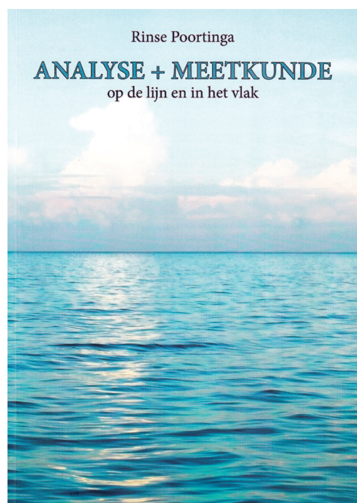
Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

BOEKBESPREKING

ANALYSE + MEETKUNDE



Floor van Lamoen



Titel: *Analyse + Meetkunde, op de lijn en in het vlak*
Auteur: Rinse Poortinga
Uitgever: eigen beheer (2011)
ISBN: 978-90-8181135-0-1
Prijs: € 32,00 (400 pagina's; paperback)

In tijden van verdergaande webbisering van onze kennis, publiceert Rinse Poortinga in 2011 een lijvig boek, waarin de belangrijkste resultaten en methoden van de analyse van functies van één variabele en de analytische vlakke meetkunde worden gepresenteerd. Op het eerste gezicht een waagstuk. Wordt er immers niet beweerd dat het tijdperk boek zijn einde nadert? Wie betaalt nog € 32,00 voor een stevig werk waarvan de inhoud ook gratis op internet is te vinden? Een snelle bladeractie door dit boek leert gelukkig dat dit wel wat anders is dan een schrijfsel uit het zaptijdperk en dat Poortinga ervoor kiest om samenhang aan te brengen in zijn boek – een bouwwerk, waar kennis op internet toch te vaak vooral een partij losse stenen is.

De auteur beoogt analyse en analytische meetkunde in samenhang te brengen, kiest voor nadruk op de theoretische structuur die op wiskundig verantwoorde wijze wordt gepresenteerd en doet dat met voorkennis van wiskunde B op het vwo als uitgangspunt. Een ambitieuze doelstelling.

Er valt voldoende te smullen voor de wiskundeliefhebber. Maar eigen aan het wiskundig verantwoorde uitgangspunt en de nadruk op bewijzen is dat het begin van het boek bestaat uit veel definities en bewijzen. Zaken passeren de revue, die wij als leraren in het voortgezet onderwijs gewend zijn zomaar aan te nemen. De uitleg van een aantal basisbegrippen in hoofdstuk 1 loopt behoorlijk vlot, dat is echter anders bij hoofdstuk 2 dat handelt over de getallenlijn. Een ronduit taai hoofdstuk waarin met veel moeite een match wordt gemaakt tussen de reële getallen en een lijn. Hier verschijnen axioma's waar ik dromerig van word. Het spookt in mijn hoofd 'Is dit noodzakelijk en voldoende? is dit niet gewoon te bewijzen? Hoe zijn de onderliggende begrippen gedefinieerd?' Bijvoorbeeld:

'***Axioma***. De translaties van ℓ , met het samenstellen van afbeeldingen als groepsbewerking, vormen een abelse groep $(\mathcal{T},\circ)$. Bij gegeven punten P en Q is er precies één translatie $\tau\in\mathcal{T}$ zodat $\tau(P)=Q$.'

Dit roept bij mij de vraag op: 'Hoe zijn die translaties nu precies gedefinieerd?' Ik ben niet helemaal overtuigd. Helemaal schrikken is het als in de laatste paragraaf van hoofdstuk 2 de vraag wordt opgeworpen 'bestaan er eigenlijk wel reële getallen?' Het antwoord is geruststellend en de vraag wordt door de auteur gelukkig wel enigszins gerelativeerd.

De beloning volgt vanaf hoofdstuk 3, er is namelijk in het vervolg van het boek heel wat moois. Hoofdstuk 3 over limieten, continuïteit en afgeleide is meteen een lekker vlot hoofdstuk, waarin de verschillende onderdelen samenhangend en helder de revue passeren. Leuk hoe Poortinga de moeite neemt om *alternatieve* definities van logaritmische en exponentiële functies op te nemen via eigenschappen van de afgeleide en via eigenschappen als $f(x+y)=f(x).f(y)$. En het gaat zo door tot en met hoofdstuk 10. Zonder uitputtend te willen zijn, was ik erg blij met de volgende onderdeeltjes: De uniekheid van sinus en cosinus als functies met dubbele afgeleide gelijk aan het tegengestelde, inversie van een punt ten opzichte van een cirkel, Möbiustransformaties, Taylorreeksen, de middelwaardestelling voor twee functies. Zijn dit onderwerpen die bij u het gevoel van klok en klepel geven? Dan is dit boek wellicht iets voor uw boekenkast. De opsomming doet eigenlijk geen recht aan de vele smullerij die er te vinden is in hoofdstukken over integralen; eenheidscirkel en goniometrie; vlakke meetkunde; cirkels, driehoeken en transformaties van het platte vlak; primitieven en Riemannsommen; hogere afgeleiden en ten slotte krommen en oppervlakte. Natuurlijk, het meeste (toch niet alles) was mij voordat

ik het boek opensloeg al bekend, maar heb ik met plezier weer bekeken en doorgenomen. Het zou echt heel jammer zijn als lezers zich door het taaie begin laten afschrikken. En voor wie er echt niet door komt, lukt het zonder hoofdstuk 2 ook wel. Ik kreeg goede gevoelens over oude syllabi van de universiteit terug, veel 'oh ja's' en toch ook suggesties over hoe ik dingen aan leerlingen zou kunnen uitleggen!

Jammer is het wel dat het boek erg theoretisch blijft. Her en der verschijnt een opgave, ongenummerd en inderdaad zonder uitwerking elders in het boek. Het 'leren bewijzen' waar de auteur in de inleiding over spreekt is zo zonder oefening met controle niet eenvoudig. Het lijkt dan ook geen leerboek, maar een nalees- en naslagwerk. Maar op bladzijde 289 staat dan opeens 'Gevonden primitieve altijd controleren d.m.v. differentiëren'. De leraar in mij glimlacht.

Het boek is eenvoudig maar netjes vormgegeven en vormt, net als de inhoud, een samenhangend geheel. De illustraties hebben een lage resolutie, wat jammer is maar niet echt storend. Grappig is om te zien hoe op bladzijde 286 plotseling met de hand een verbetering is aangebracht.

> DE LERAAR IN MIJ GLIMLACHT

Als conclusie kijken we nog eens terug naar de ambitie van de auteur. Hij is er zeker in geslaagd om analyse en analytische meetkunde in samenhang te brengen en dat ook nog eens op een verantwoorde manier. Of vwo wiskunde B als ondergrond alleen voldoende is om het boek te doorgronden, dat betwijfel ik eerlijk gezegd. Het niveau is pittig en er is weinig ruimte voor verwerking ingebouwd. In zijn inleiding zegt de auteur over de besproken onderwerpen dat deze '...noodzakelijk [zijn] voor iedereen die een exact vak studeert op universitair bachelorniveau'. Hier slaat hij de spijker op zijn kop voor wat betreft zijn doelgroep, al hoort een aantal hbo'ers er ook zeker bij. Het is voor eerstegraders onder ons een interessante suggestie voor in de boekenkast. Een behoorlijk aantal onderwerpen in samenhang. En stijgt ver uit boven het webniveau.

Over de auteur

Floor van Lamoen is leraar wiskunde aan het Ostrea Lyceum te Goes. Daarnaast is hij editor van het internationale meetkundetijdschrift *Forum Geometricorum*. E-mailadres: *fvanlamoen@planet.nl*



MEDEDELING



PRIJSUITREIKING EN EERSTE RONDE VAN DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 8 november werden op de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in het zonnetje gezet. Na drie rondes waren er in elke categorie (zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager) vijf prijswinnaars die met een geldbedrag variërend van 50 tot 250 euro naar huis gingen. De uitslag vindt u terug op *www.wiskundeolympiade.nl*.

Geeft u uw leerlingen volgend jaar (weer) de kans om in de prijzen te vallen? Schrijf uw school dan nu in via *wedstrijd.wiskundeolympiade.nl*. U kunt vervolgens zelf een geschikte dag en tijd uitzoeken in de periode van 20 t/m 30 januari om de eerste ronde op school af te nemen. Als u voor het eerst wedstrijdleider bent, kunt u inloggen op de wedstrijdsite door bij zowel de gebruikersnaam als bij het wachtwoord op de wedstrijdsite de brincode van uw school in te voeren. De rest wijst zich dan vanzelf. In oktober zijn de informatiepakketten verzonden naar alle scholen. Als u meer posters, brochures of leaflets wilt, kunt u deze aanvragen via *info@wiskundeolympiade.nl*.



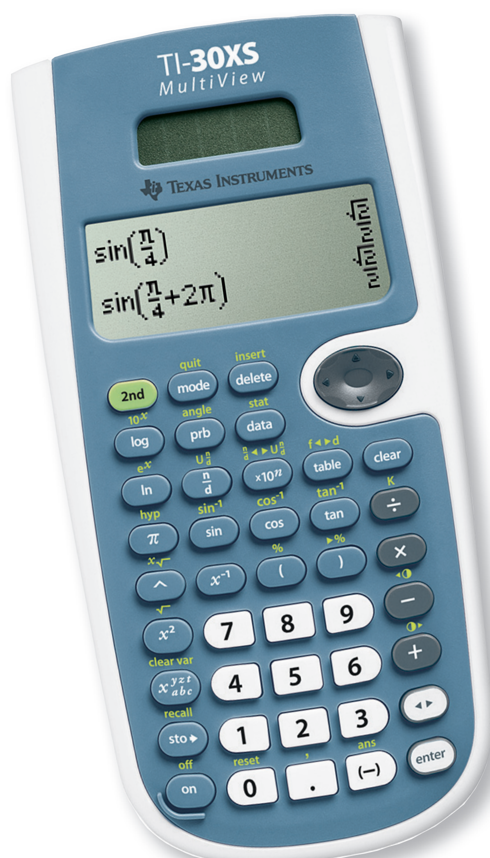
De nieuwe TI-84 Plus C *Silver Edition*

Is nu beschikbaar, bestel 'm vast!

- Goedgekeurd door CVE voor Centraal Eindexamen h/v
- Met backlit kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur! (vanaf juni)
- Gratis upgrade huidige zwart-wit SmartView naar kleur

Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding

voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor beamer of digibord.



Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar

ti-cares@ti.com

Kijk ook op

www.edcuation.ti.com/nederland

Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor de wetenschappelijke rekenmachine TI-30XS MultiView.

Machine + SmartView software voor projectie met beamer of digibord voor slechts € 20,-

Texas Instruments

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

GONIO: PROSTHAPHAIRESIS

Dick Klingens

De prosthaphairesis is een algoritme dat in de 16e en de eerste helft van de 17e eeuw gebruikt werd om de uitkomst van een vermenigvuldiging of deling te benaderen. De benodigde formule kan algebraïsch worden afgeleid maar Dick Klingens richt zich in dit artikel op het meetkundige bewijs.

Een formule[1] als:

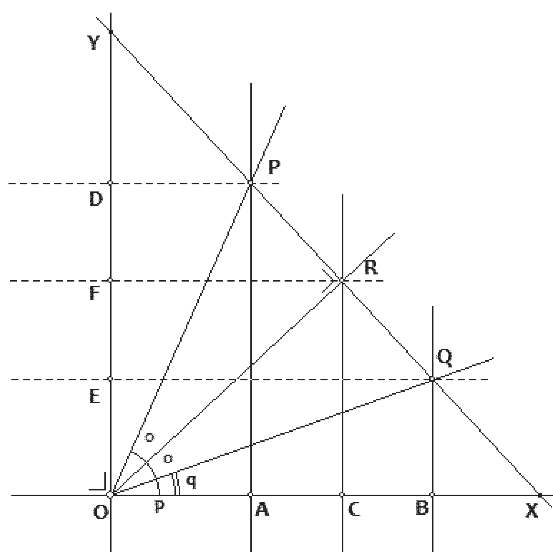
(1)... $\cos p + \cos q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p + q) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$

wordt in een klassensituatie meestal *algebraïsch* afgeleid uit de som- en verschilformule van de cosinus[2]:
$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
Optelling van beide geeft:
(2)... $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cdot \cos b$
Substitutie van $a = \tfrac{1}{2}(p + q)$ en $b = \tfrac{1}{2}(p - q)$ in relatie (2) leidt dan tot relatie (1).

Maar (1) kan ook *meetkundig* worden bewezen. Ik laat hieronder een eenvoudig bewijs op basis van loodrechte projectie van lijnstukken volgen.

In figuur 1 zijn de hoeken $POX = p$ en $QOX = q$ weergegeven. Deze hoeken hebben de (halve) lijn OX als gemeenschappelijk been. De (lengtes van de) lijnstukken PO en QO zijn gelijk en het punt R is het midden van PQ, waarmee de lijn OR de bissectrice is van de hoek POQ. Er geldt:
- $\angle POR = \tfrac{1}{2}(p - q)$
- $\angle ROX = \tfrac{1}{2}(p - q) + q = \tfrac{1}{2}(p + q)$

figuur 1



De loodrechte projecties van de punten P, Q, R op de lijn OX zijn A, B, C.

Nu is:
in driehoek OAP: $\dfrac{OA}{OP} = \cos p$, zodat $OA = OP \cdot \cos p$;

analoog in driehoek OBQ: $OB = OQ \cdot \cos q$;
en in driehoek OCR: $OC = OR \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p + q)$.
Uit $OC = \tfrac{1}{2}(OA + OB)$, zodat $OA + OB = 2 \cdot OC$, volgt dan:
(3)... $OP \cdot \cos p + OQ \cdot \cos q = 2 \cdot \underline{OR} \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p + q)$
In driehoek POR is $\underline{OR} = OP \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$, zodat (3) daarmee overgaat in:

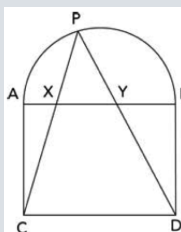
(4)... $OP \cdot \cos p + OQ \cdot \cos q = 2 \cdot OP \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p + q)$
Uit [4] blijkt dan na deling door $OP = OQ$ opnieuw – zie (1) – dat:

$\cos p + \cos q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p + q) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$

De projecties van P, Q, R op de lijn OY, die in O loodrecht staat op OX, zijn D, E, F. Met de complementen van de hoeken bij O is dan:
$OD = OP \cdot \sin p$;
$OE = OQ \cdot \sin q$;
$OF = OR \cdot \sin \tfrac{1}{2}(p + q)$.
Uit $OD + OE = 2 \cdot OF$ volgt:
$OP \cdot \sin p + OQ \cdot \sin q = 2 \cdot \underline{OR} \cdot \sin \tfrac{1}{2}(p + q) = 2 \cdot OP \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(p + q)$
of:
(5)... $\sin p + \sin q = 2\sin \tfrac{1}{2}(p + q) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$

Een bewijs van de formules:
(6a)... $\cos p - \cos q = -2\sin \frac{1}{2}(p+q) \cdot \sin \frac{1}{2}(p-q)$
(6b)... $\sin p - \sin q = 2\sin \frac{1}{2}(p-q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p+q)$
zo mogelijk gebaseerd op projecties zoals hierboven – laat ik aan de lezer.

Prosthaphairesis – Uit relatie (2) volgt:
(7)... $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
Een historische toepassing van deze formule, in de 16e en de eerste helft van de 17e eeuw, wordt *prosthaphairesis* genoemd.[3] Naar verluidt heeft de Deense astronoom Tycho Brahe (1546-1601) de formule in 1580 gebruikt in een door zijn assistenten gebruikte handleiding bij planimetrische en ruimtelijke berekeningen.[4] De prosthaphairesis werkt bij het vermenigvuldigen van twee getallen als volgt.
Gevraagd. $P = 10988 \cdot 42992$
Oplossing. $P = 0{,}10988 \cdot 0{,}42992 \cdot 10^{10}$
Uit $\cos a = 0{,}10988$ volgt $a = 83°41'30''$, en uit $\cos b = 0{,}42992$ volgt $b = 64°32'15''$.
(Men beschikte in die tijd over redelijk nauwkeurige goniometrische tabellen tot in 7 decimalen.)
Dan is $a + b = 148°13'45''$ en $a - b = 19°9'15''$. Met formule (7) is:
$P \approx \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \cdot 10^{10} = \frac{1}{2}(-0{,}8501608 + 0{,}9446391) \cdot 10^{10}$
zodat:
$P \approx 0{,}04723915 \cdot 10^{10} = 472.391.500$ (werkelijk: $P = 472.396.096$)



Probleem van Fermat: Teken een rechthoek waarvan AB is $\sqrt{2} \times AC$, teken daar een halve cirkel bovenop en kies hierop een willekeurig punt P.
Construeer de punten X en Y zoals in de tekening. Bewijs dat $AY^2 + BX^2 = AB^2$.

WEBSITE

Als u meer wilt lezen van Dick Klingens dan verwijzen we u graag naar onze website. Hier vindt u zijn artikel over een meetkundig probleem van Fermat. Dick geeft twee oplossingen waarvan een gebaseerd is op analytische meetkunde. Net zoals in het artikel hiernaast zijn er interessante raakvlakken met de huidige en/of toekomstige bovenbouwstof. Zie *vakbladeuclides.nl/893klingens*

Noten

[1] Het is een van de vier zogeheten *formules van Simpson* (naar Thomas Simpson, 1710-1761, Engeland). De andere drie zijn de formules (5), (6a) en (6b) in dit artikel.
[2] Zie voor een meetkundig bewijs van de som- en verschilformule van de *sinus*, gebaseerd op de stelling van Ptolemaeus, bijvoorbeeld: *www.pandd.demon.nl/sinregel.htm#3* (website van de auteur)
Uit de verschilformule van de sinus, $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$, volgt met vervanging van a door $(90° - a)$:
in het linkerlid: $\sin((90° - a) - b) = \sin(90° - (a + b)) = \cos(a + b)$
in het rechterlid: $\sin(90° - a) \cdot \cos b - \cos(90° - a) \cdot \sin b = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
[3] 'Prosth-aphairesis' is een samentrekking van de Griekse woorden 'prosthesis' (= optelling) en 'aphairesis' (= aftrekking).
[4] J.L.E. Dreyer (1916): *On Tycho Brahe's Manual of Trigonometry*. In: *The Observatory*; volume 39, pp. 127-131. Dit artikel is te downloaden via NASA Astrophysics Data System (ADS): *http://adsabs.harvard.edu/full/1916Obs....39..127D*

Over de auteur

Dick Klingens is redacteur (tot juli 2013 eindredacteur) van *Euclides*. Hij was tot aan zijn pensioen in 2010 als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel, en was daarnaast gedurende een aantal jaren ook opleider van leraren voor het technisch beroepsonderwijs. Van 2007 tot eind 2012 was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreek ik opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



Aº 1931

Deze keer een relatief eenvoudige opgave en een kleine uitsmijter, beide uit 1931. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1

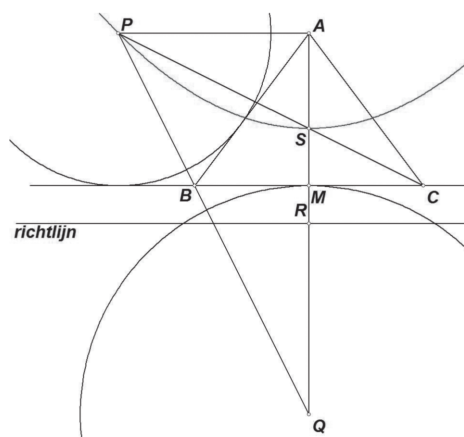
Bereken de tophoek A van de gelijkbenige driehoek ABC, indien de parabool, gaande door de middelpunten van de aan de opstaande zijden aangeschreven cirkels, A tot brandpunt heeft, terwijl zijn richtlijn de verbindingslijn van A met het middelpunt van de aan de basis aangeschreven cirkel middendoor deelt. (Let op de symmetrie!)

Opgave 2

Van driehoek ABC is gegeven de zijde c, terwijl $C = bg\,tg\frac{4}{3}$. Druk $a + 2b$ uit in c en A en bepaal die waarde van A, waarvoor $a + 2b$ maximaal is. (De kleine letters verwijzen naar de lengtes van de zijden, de hoofdletters naar de hoekgroottes en $\tan\angle C = \frac{4}{3}$.)

Uitwerking opgave 1

Zie figuur 1 voor een werkschets. Wellicht enige handvaten bij deze werkschets: Niet getekend is de aangeschreven cirkel aan AC, die is overbodig vanwege de symmetrie. P en Q zijn middelpunten van de getekende aangeschreven cirkels. CP is bissectrice van $\angle C$, PQ is buitenbissectrice van $\angle B$, AP is buitenbissectrice van $\angle A$, AQ is bissectrice van $\angle A$. S is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.
Uit de gegevens volgt: $PA = AR = RQ$.

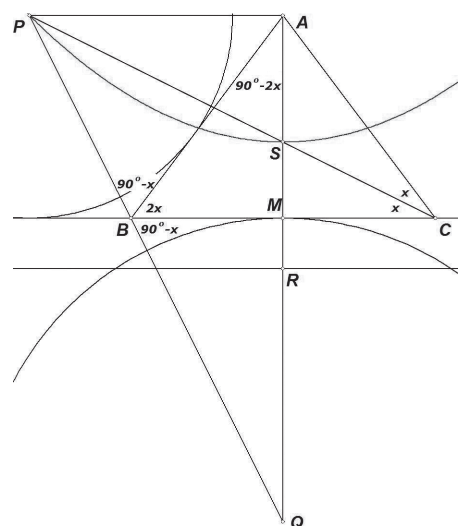


figuur 1

Wilt u het zelf eerst eens verder proberen?

Op hoekenjacht

Stel $\angle BCP = x$, de invulling van hoekgroottes in figuur 2 volgt dan onmiddellijk uit de aanwezige loodrechte standen en deellijnen.



figuur 2

Maakt u het even af?

Verdere uitwerking:

AP staat loodrecht op AQ, bissectrices van $\angle A$. De hoekensom in driehoek BMQ geeft $\angle Q = x$.

Ten slotte is $\tan\angle Q = \frac{PA}{AQ} = \frac{1}{2}$, dus $\angle Q = x = 26{,}565°$,

dus is de gevraagde $\angle BAC = 2(90° - 2x) = 73{,}7397953°$ $= 73°44'23''$

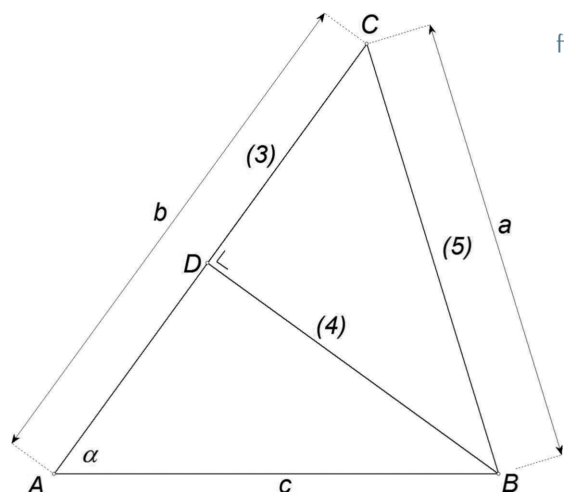
De opgave is af, maar toch blijf ik met een paar vermoedens zitten:

(1) Het middelpunt S van de ingeschreven cirkel lijkt de top te zijn van de parabool;

(2) Het raakpunt T van de aangeschreven cirkel aan AB lijkt op de parabool te liggen.

Ook is frappant dat mijn oplossing geheel meetkundig is, maar de opgave in een examen trigonometrie en analytische meetkunde stond. De opgave kan dan ook prima worden aangepakt met die analytische meetkunde. Een paar handvaten: De driehoeken APQ, BMQ, BSQ, BSM en PTB zijn gelijkvormig met zijden die zich verhouden als $1 : 2 : \sqrt{5}$. Wanneer je dan $SM = 1$ stelt, kan hiermee van elk punt de coördinaten worden afgeleid in een assenstelsel met BC als horizontale en AM als verticale as. Dit levert op:
$M = (0{,}0)$; $R = (0,-\frac{2}{3})$; $S = (0{,}1)$; $Q = (0,-4)$;
$P = (-\frac{10}{3},\frac{8}{3})$; $B = (-2{,}0)$; $C = (2{,}0)$; $A = (0,\frac{8}{3})$.
Hiermee kunnen vergelijkingen van lijnen worden opgesteld, waarmee $T(-\frac{6}{5},\frac{16}{15})$ kan worden bepaald.
Dus $AS = SR = \frac{5}{3}$, $TA = 2$ en $d(T,\text{richtlijn}) = \frac{26}{15}$.
Dus (1) is waar, (2) niet.
Met deze coördinaten kan natuurlijk ook $\angle A$ worden bepaald.

De parabool speelt eigenlijk geen rol in deze opgave. Ook de richtlijn kan eruit door herformulering. De opgave is dan uitermate geschikt in het huidige vwo wiskunde B-curriculum: Van de gelijkbenige driehoek ABC met tophoek A is P het middelpunt van de aangeschreven cirkel aan AB. Q is het middelpunt van de aangeschreven cirkel aan BC, en S het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Als $AQ = 2AP$, bereken dan $\angle BAC$.
Wanneer u een opgave over koordenvierhoeken zoekt kan bovenstaande opgave worden ingezet. Aanwezige koordenvierhoeken: $BPAS$, $BSCQ$ en $CQPA$.



figuur 3

Uitwerking opgave 2

Zie figuur 3 voor een werkschets. Uit $\tan\angle C = \frac{4}{3}$ volgt, dat driehoek BCD een 3-4-5-driehoek is. Dus $BD = \frac{4}{5}a$, $CD = \frac{3}{5}a$ en $AD = b - \frac{3}{5}a$.
Lukt het u om de uitdrukking $a + 2b$ uit te drukken in c en α? Probeer voordat u verder leest.

Verdere uitwerking

$$\sin\alpha = \frac{\frac{4}{5}a}{c} = \frac{4a}{5c} \quad \text{en} \quad \cos\alpha = \frac{b - \frac{3}{5}a}{c}$$

Dus $a = \dfrac{5c\sin\alpha}{4}$ en $b = c\cos\alpha + \frac{3}{5}a = \dfrac{4c\cos\alpha + 3c\sin\alpha}{4}$

Zodat $a + 2b = \frac{c}{4}(11\sin\alpha + 8\cos\alpha)$

Weet u het nog? (examenstof van voor de Tweede fase!)

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi) \quad \text{waarbij} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Dus $a + 2b = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{8^2 + 11^2}\cos(\alpha - \varphi)$ met $\tan\varphi = \dfrac{11}{8}$, dus

$\varphi \approx 53{,}97262661°$

Deze uitdrukking is maximaal als
$\alpha = \varphi \approx 53{,}97262661° \approx 53°58'21''$

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

WISKUNDE DIGITAAL

GEOMETRY TEST 3.0



Lonneke Boels

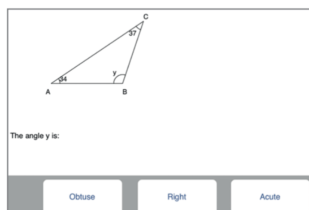
Deze keer schrijft Lonneke Boels over een app die de kennis van leerlingen over driehoeken, rechthoeken, vierkanten en cirkels test. Het gaat om kennis als: wat is de omtrek, wat is de zijde als de omtrek gegeven is, welke hoek is scherp, welke hoek is stomp, welke hoeken zijn samen 90° of 180°, wat is de straal van de cirkel als de oppervlakte gegeven is?

Geschikt voor: iPhone, iPod touch en iPad.
Vereist iOS 3.2 of nieuwere versies.

Doordat zowel het niveau als het onderwerp (rechthoek, driehoek enzovoort, en alles door elkaar) zijn in te stellen, is de app geschikt voor vrijwel alle leerlingen. Bovendien krijgen leerlingen na afloop hun score en kunnen ze de antwoorden terugkijken. Eigenlijk is het al met al best een aardige app om wiskunde te oefenen. Hij heeft wel één groot nadeel: alles is in het Engels. Maar dat nadeel is minder groot dan het in eerste instantie lijkt. Wie de Engelse termen voor stomp, scherp, enzovoort niet kent, kijkt gewoon bij hints.

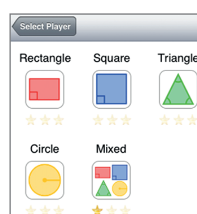
Pluspunten

– het is echte wiskunde;
– er zijn verschillende niveaus: bij de afzonderlijke figuren doordat je een specifiek onderdeel kunt kiezen en binnen de gemengde opgaven door te kiezen voor 'easy', 'medium' of 'hard';
– als je een fout maakt, krijg je dezelfde vraag nogmaals, maar dan in een andere figuur;
– je kunt heel precies instellen wat je wilt oefenen: type hoeken, type driehoeken, omtrek driehoeken, binnenhoek, buitenhoek, enzovoort;
– het programma geeft hints als je dat wilt;
– je kunt pauzeren (als je de app verlaat, ga je bij terugkomst verder waar je gebleven was);
– je kunt meerdere gebruikers toevoegen, dus ook meerdere leerlingen met één iPad laten werken;
– het niveau is makkelijk te doen voor een slimme leerling uit groep 8 (als hij of zij Engels begrijpt), terwijl sommige moeilijke opgaven zelfs voor 3 vwo of 4 vwo nog pittig kunnen zijn;
– gunstige prijs-prestatieverhouding.



figuur 1 Voorbeeld van een vraag uit het onderdeel driehoeken, type hoek. 'Obtuse' betekent stomp en 'Acute' betekent scherp.

figuur 2 Score-overzicht van één leerling



figuur 3 Basisvormen

Minpunten

– het is geen spel, maar alleen een oefening;
– de taal en uitleg zijn in het Engels.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten € 0,89
Geschikt voor: havo, vwo, vooral onderbouw; als herhaling basisvaardigheden voor bovenbouw wiskunde B geschikt. Qua inhoud ook geschikt voor mavo, maar door de Engelse taal is de drempel voor de meeste leerlingen uit deze doelgroep te groot.
Meer informatie over het spel: *www.cottoncoladesigns.com*

Oproep van de auteur: Er zijn maar weinig apps die echt wiskunde oefenen en deze apps zijn dan ook nog vaak erg saai. Een leuke wiskundegame heb ik nog niet gevonden. Als u er wel een kent, laat u het me dan weten?

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: *l.boels@alaka.nl*

Euclides 89-3_v3.indd 27 28-11-13 10:38

UIT DE ZEBRAREEKS

Rob van Oord

PERSPECTIEF, HOE MOET JE DAT ZIEN?

De redactie van de Zebrareeks valt onder verantwoordelijkheid van de NVvW. Deze reeks is bij uitstek geschikt om te gebruiken als basis voor een keuzeonderwerp of als aanzet voor een praktische opdracht. Vanwege de grote diversiteit van de onderwerpen is er voor elk wat wils, maar dat maakt het ook lastig kiezen. Om het u makkelijker te maken, zetten we in de komende nummers van *Euclides* telkens een andere Zebra in de schijnwerpers. Wie weet zet het u aan tot een (nog) intensiever gebruik van deze unieke boekjes.



Boekje 2

Titel: Perspectief, hoe moet je dat zien?
Auteurs: Agnes Verweij en Martin Kindt
Onderwerpen: vlakke meetkunde, lijnen in de ruimte, stelling van Thales (in de appendix uitgelegd)
Benodigde voorkennis: ruimtelijke vormen als een kubus en een balk, voorstelling kunnen maken van vlakken en snijlijnen

Waarover gaat het boekje?

In dit boekje wordt uitgelegd hoe je in een perspectieftekening een voorstelling kan maken van figuren van lijnstukken in een (grond-)vlak. Vervolgens wordt uitgelegd hoe ruimtelijke voorwerpen met vlakke zijkanten, zoals een balk of kubus, die recht voor de kijker staan in éénpuntsperspectief getekend kunnen worden en hoe je uit zo'n tekening de positie van het oog van de kijker kunt terugvinden.
De laatste hoofdstukken gaan over tekeningen van rechthoekige voorwerpen die schuin voor de kijker staan, en waarbij er sprake is van twee vluchtpunten. Wanneer het tafereel dan ook nog schuin tussen de kijker en het voorwerp gedacht wordt, is er sprake van driepuntsperspectief. Met behulp van de drie vluchtpunten die daarbij horen, die vaak buiten de tekening liggen, kan bepaald worden waar het oog van de kijker moet zitten om de voorstelling in zijn ware gedaante te kunnen zien.

Hoe zit het boekje in elkaar?

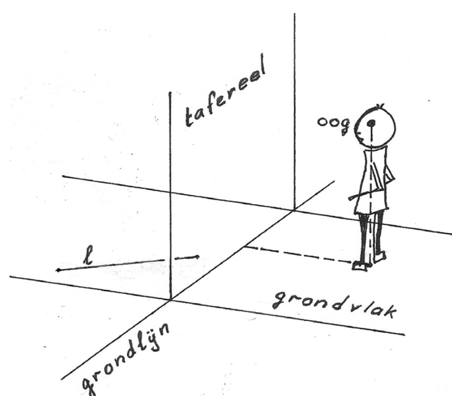
Het boekje bestaat uit zeven hoofdstukjes waarin de theorie stukje bij beetje wordt opgebouwd. Elk hoofdstuk begint met de uitleg van een stuk theorie, vergezeld van duidelijke plaatjes. Daarna volgen enkele opdrachten die de lezer kan maken om te bedenken in hoeverre hij de theorie snapt, of waarbij de theorie moet worden toegepast. De antwoorden van deze opdrachten staan achter in het boekje (H9). Af en toe moet er ook zelf getekend worden om van bestaande perspectiefafbeeldingen vluchtpunten en oogpunten te construeren. Ook de eindopdracht (H8) gaat over het analyseren van bestaande perspectiefafbeeldingen, die in dit geval door de lezer zelf verzameld moeten worden.

De behandelde stof in het kort

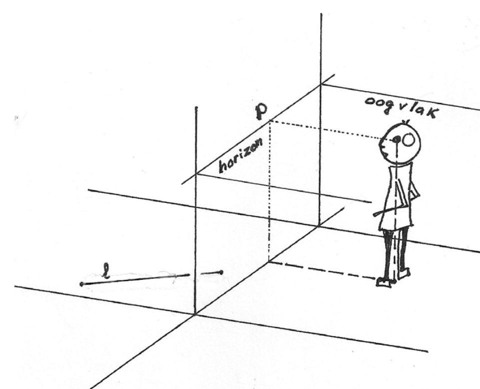
Theorie – In dit boekje worden perspectieftekeningen geanalyseerd met behulp van meetkunde. Het doel van perspectieftekenen is het verkrijgen van de plaats van de ruimte die iemand ziet met een *tafereel*, een (denkbeeldig) vlak tussen de kijker en het voorwerp (landschap) dat hij ziet. Kortom: *de kunst om voorwerpen zó op een plat vlak af te beelden, dat zij op het oog dezelfde indruk maken als de voorwerpen zelf, uit een gegeven standpunt gezien*. In eerste instantie staat het tafereel loodrecht op het *grondvlak*, het vlak waarop de kijker staat, zie figuur 1. De constructie van de perspectieve plaats van lijntje l op het tafereel begint met het tekenen van het *oogvlak*, een horizontaal vlak op ooghoogte, evenwijdig met het grondvlak. De snijlijn van het oogvlak met het tafereel is de *horizon*. Hierin is P de loodrechte projectie van het oog op de horizon. P wordt ook wel *oogpunt* genoemd.

De lengte van lijnstuk *OP* wordt *distantie* genoemd, de afstand van het oog tot het tafereel, zie figuur 2. Het gaat er nu om het vlak te construeren dat gevormd wordt door het oogpunt en het lijntje *l*. Er wordt gebruikgemaakt van de stelling: *als twee evenwijdige vlakken* (zoals hier het grondvalk en het oogvlak) *gesneden worden door een derde vlak* (hier OA_1A_4), *dan lopen de snijlijnen evenwijdig*. Dus teken je een lijn vanuit *O* evenwijdig aan het lijntje *l*. *V* is het snijpunt van vlak OA_1A_4 met de horizon. *V* wordt ook wel ook wel *vluchtpunt* of *verdwijnpunt* van *l* genoemd. De lijn waarop lijntje *l* ligt snijdt de grondlijn in punt *L*, zie figuur 3. In figuur 4 is ten slotte te zien hoe lijntje *l* in perspectief op lijnstuk *LV* op het tafereel terechtkomt. De punten A_1, A_2, A_3 en A_4 die op lijntje *l* liggen, worden in perspectief steeds hoger afgebeeld. Ook is te zien dat van deze punten die op het origineel op gelijke afstanden liggen, de beeldpunten in het tafereel naar het vluchtpunt toe dichter op elkaar komen te liggen. *V* is het vluchtpunt van alle lijnen in het grondvlak die parallel lopen met lijntje *l*. Bedenk dat elk vlak gevormd door *O* en een lijntje evenwijdig met lijntje *l* behoort tot een waaier met as *OV*. Op het tafereel komen alle lijnen die parallel lopen met lijntje *l* in het grondvlak, net als een patroon van slootjes in een polder, op de horizon in het punt *V* bij elkaar. Zo komen alle lijnen die in het grondvlak loodrecht op de grondlijn staan in het perspectief (op het tafereel) in het oogpunt *P* bij elkaar.

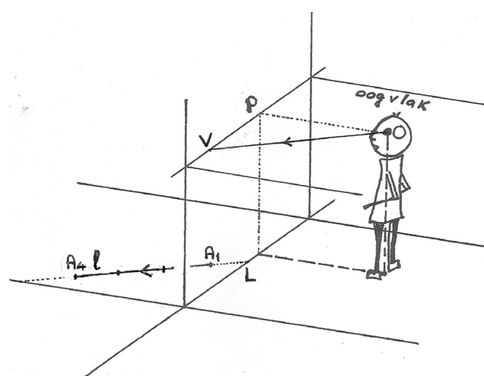
Eénpuntsperspectief – Om de constructie van het éénpuntsperspectief van een dambordpatroon te maken, wordt gebruikgemaakt van een zogenaamd drieluik. Grondvlak tot aan de grondlijn, oogvlak tot aan de horizon, en tafereel tussen grondlijn en horizon worden in één plat vlak gelegd. In het grondvlak wordt een dambordpatroon getekend, nu nog met de lijnen loodrecht en evenwijdig aan de grondlijn. Op het oogvlak wordt het oog *O* getekend (neem dit niet te dicht op de horizon, maar minimaal 10 cm er vanaf). Teken het *oogpunt P* op de horizon. Dit is het vluchtpunt van de lijnen die loodrecht op de grondlijn staan. Bedenk dat de lijnen die parallel lopen met de grondlijn geen vluchtpunt hebben. Om de afstanden tussen de dambordlijnen goed in het perspectief te krijgen, wordt gebruikgemaakt van het vluchtpunt *V* van alle lijnen die diagonaal door de vierkantjes lopen, dus onder een hoek van 45° met de grondlijn staan. Vanuit *O* wordt dus de lijn getekend die evenwijdig is met een van de diagonale richtingen van het dambordpatroon, zie figuur 5. De lezer wordt uitgenodigd om zelf op een A4-ruitjesblad aan de slag te gaan. Met behulp van de vluchtpunten *P* en *V* kan nu eenvoudig de perspectieftekening van het dambordpatroon in het tafereel getekend worden, zie figuur 6. Om vervolgens het éénpuntsperspectief van een kubus (bijvoorbeeld op het dambord) te tekenen, kunnen we gebruikmaken van de eigenschap dat in een vlak parallel aan het tafereel de verticale en horizontale afstanden even groot blijven. Je kunt dus gewoon de voorkant en de achterkant van de kubus als vierkant tekenen.
Hoe vind je de plaats van het oog terug bij een plaatje in éénpuntsperspectief? Zoek evenwijdige lijnen die loodrecht op de horizon staan. Construeer daarmee het vluchtpunt *P*, het oogpunt, op de horizon. Je hebt dan ook meteen de horizon te pakken. Zoek vervolgens het vluchtpunt *V* van een van de diagonale richtingen. Omdat driehoek *OPV*



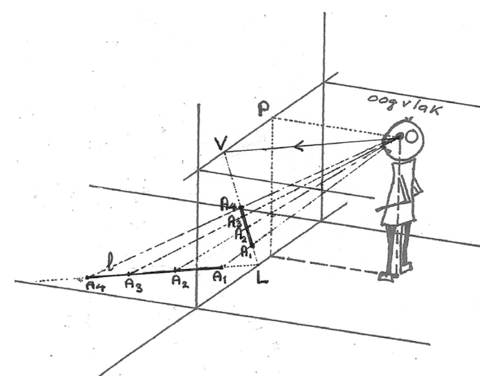
figuur 1 Waar komt het lijntje *l* in perspectief op het tafereel?



figuur 2 De snijlijn van het (horizontale) oogvlak met het tafereel is de horizon.



figuur 3 Het vlak door het oog (*O*) en lijntje *l* snijdt het grondvlak en het oogvlak over twee evenwijdige lijnen.



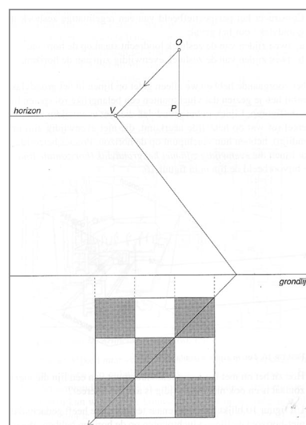
figuur 4 De perspectieve plaats van het lijntje *l* op het tafereel (met de plaats van enkele punten op *l*)

een ‘geodriehoek’ is, kan je nu de plaats van het oog precies loodrecht voor vluchtpunt P op afstand PV stellen. Als je vanaf dat punt, uiteraard met één oog, naar het plaatje kijkt, dan zie je het zonder vertekening.

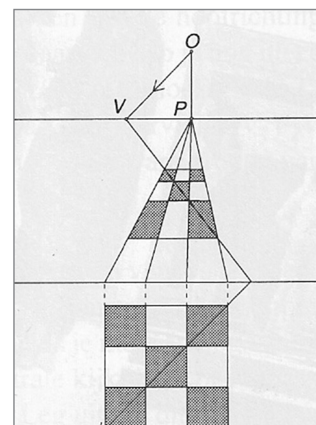
Tweepuntsperspectief – Wanneer een dambordpatroon niet recht voor de grondlijn staat, maar gedraaid, dan komen de lijnen die de richtingen van de zijkanten voorstellen in twee verdwijnpunten V_1 en V_2 op de horizon bij elkaar. Omdat deze richtingen loodrecht op elkaar staan, moet het oog in het oogvlak op de halve cirkel met middellijn V_1V_2 liggen. Als je ook de vluchtpunten W_1 en W_2 van de diagonale richtingen van het dambordpatroon op de horizon hebt, dan moet het oog in het oogvlak ook op de halve cirkel met middellijn W_1W_2 liggen. Het snijpunt van de twee halve cirkels geeft dan de plaats van het oog in het oogvlak aan van waaruit je het dambord in ware vorm kunt zien, zie figuur 7. In de figuur is $AD \parallel OV_1$, $AB \parallel OV_2$, $AC \parallel OW_1$ en $BD \parallel OW_2$.
Hoewel vaak een van de vluchtpunten van de diagonalen buiten de tekening valt, kun je toch de plaats van het oog vinden met een van deze vluchtpunten. Je weet immers dat de hoek tussen zijlijnen en diagonale richtingen 45° moet zijn. Een omtrekshoek van 45° vind je door de omtrekshoek op de koorde van een kwart cirkel vanuit V_1 of V_2 te nemen (stelling van de constante hoek). Het been OW_1 moet dus halverwege de cirkelboog V_1V_2, zeg punt M, komen. Omgekeerd: teken dus de lijn vanuit M door W_1 naar de halve cirkel en je hebt het oog O, zie figuur 8. Om de perspectieve hoogte van de kubus te bepalen, kunnen we nu geen gebruikmaken van even lange lijnstukken. We construeren het vluchtpunt U_1 van diagonaal AH (en BG) op de verticale lijn door V_1. Omdat AH een hoek van 45° maakt met het grondvlak zal driehoek OV_1U_1 ook een ‘geodriehoek’ zijn, dus $V_1O = V_1U_1$, zie figuur 9. De lijn U_1A snijden met de verticale lijn uit D in het drieluik geeft dan het perspectiefbeeld van punt H.

Driepuntsperspectief – Wanneer je het tweepuntsperspectief tekenen onder de knie hebt, komt het driepuntsperspectief aan de beurt. Er zijn twee soorten driepuntsperspectief. Het tafereel is een hellend vlak. Wanneer je van bovenaf op het schuine tafereel kijkt naar het voorwerp eronder, dan spreken we van vogelperspectief. Wanneer je van onderaf door het tafereel naar het af te beelden voorwerp kijkt dan spreken we van kikkerperspectief. De vluchtpunten van de drie onderling loodrechte richtingen vormen met het oog een viervlak waarvan drie zijkanten rechthoekige driehoeken zijn. Op een vergelijkbare manier als bij het tweepuntsperspectief kun je de plaats van het oog ten opzichte van het tafereel terugvinden. De stelling van Thales speelt hierbij weer een mooie rol. Ik laat de details over aan het moment dat u zelf het boekje leest.

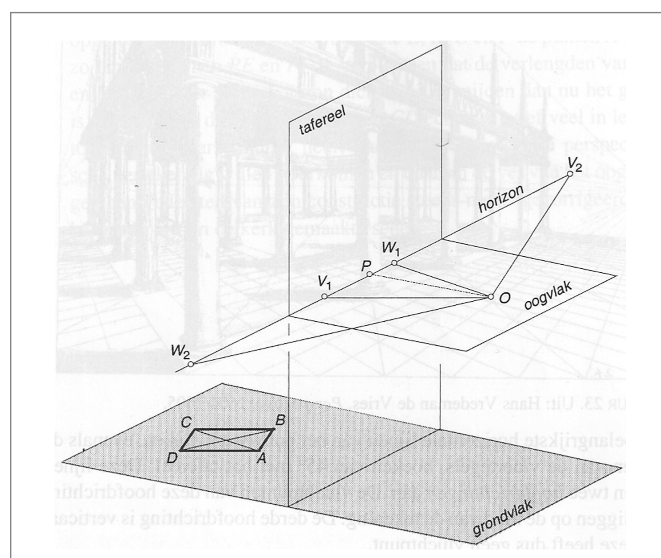
Enkele opmerkingen – Het is lastig om uit een plaatje waarin de perspectieftekening staat, de opbouw van de tekening terug te vinden. Ook vraagt het enig ruimtelijk inzicht om de tekeningen van een perspectieftekening, die zelf in een schuine paralleltekening zijn gemaakt, te snappen. De beste manier om een perspectieftekening te begrijpen, is om zelf het drieluik van het dambord-tegelvloertje te maken (opdracht 11). Het verdient aanbeveling om de zwarte vierkantjes in het tafereel er uit te snijden. Als je dan in het gevouwen drieluik vanaf het oogpunt (dat je dan op de rand van het oogvlak moet nemen) onderdoor naar het grondvlak van het drieluik kijkt, zie je op de plaats van de uitsnijdingen precies de gaten gevuld met de zwarte vierkantjes van het dambordje, dus het dambord in perspectief, zie foto 1.
Een ander probleem bij het maken van de opdrachten is dat bij het kleine formaat van het boekje de standpunten van het oog van de kijker zo dicht op het papier zitten dat



figuur 5 Werkblad dambordpatroon



figuur 6 Perspectief dambordpatroon



figuur 7 Voor het oogpunt O geldt dat $\angle V_1OV_2 = \angle W_1OW_2 = 90°$, kortom O is het snijpunt van de halve cirkels met middellijn V_1V_2 respectievelijk W_1W_2.



foto 1 Perspectief drieluik van een dambordpatroon

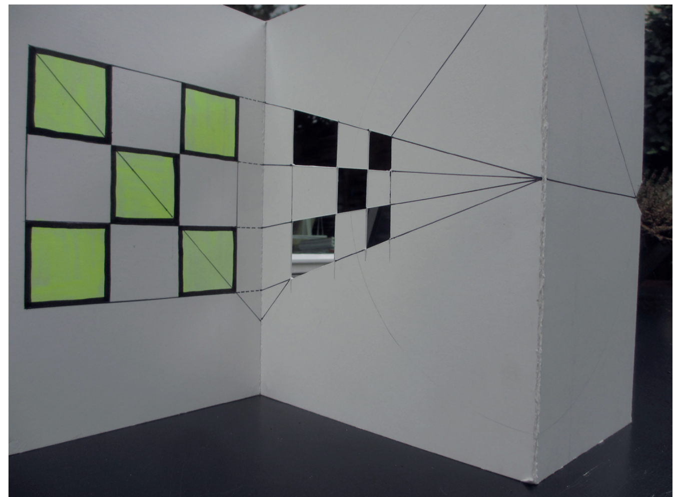
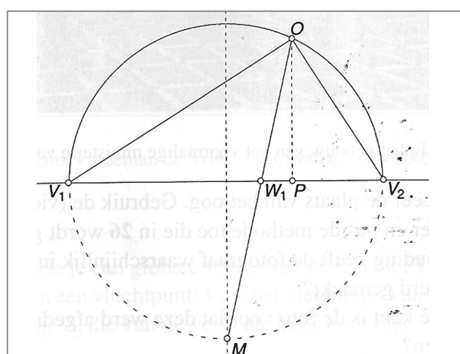
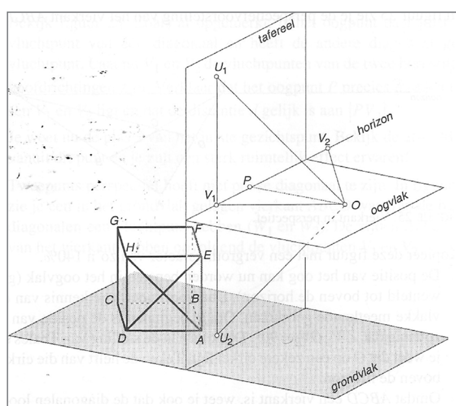


foto 2 Het doorkijkje

je niet werkelijk vanaf dat punt kunt zien dat er vanuit het oogpunt gezien geen vertekening optreedt. Het verdient de voorkeur om het oogpunt van het drieluik op minimaal 10 cm van de horizon te nemen (opdracht 12). Het oogpunt in het drieluik dat door een leerling gemaakt is, staat 10 cm van de horizon. Je kunt dan heel goed in het doorkijkje door de perspectieve vierhoekjes de zwart omlijnde vierkantjes van het dambordpatroon zien, zie foto 2.



figuur 8 $\angle V_1OW_1 = 45°$, is constante hoek op boog V_1M



figuur 9 Vluchtpunten van omhoog lopende diagonalen, OU_1 evenwijdig aan AH (en BG)

Wat vinden de leerlingen ervan? – Elk jaar kiest een aantal van mijn leerlingen ervoor om dit boekje als Praktische Opdracht door te werken en te presenteren aan de klas. Zowel leerlingen met wiskunde A als leerlingen met wiskunde B komen moeiteloos door de stof. Het is verrassend om te zien hoe de leerlingen in hun PowerPoint-presentatie uitleggen hoe perspectief tekenen werkt en hoe je bij verschillende soorten perspectief de standpunten van het oog kunt bepalen. Ook getoonde werkstukken waar aan verschillende kanten A4'tjes zijn geplakt om de verdwijnpunten te kunnen tekenen, zijn getuige van een goed begrip van het perspectieftekenen. Wiskunde A-leerlingen hoeven de stelling van Thales niet echt te kunnen toepassen. Het beperkt zich tot het kunnen tekenen van cirkels bij gegeven middellijnen. In opdracht 29 wordt gevraagd om de constructie van het oogpunt en de distantie te bewijzen. Dit kan voor wiskunde A-leerlingen net een brug te ver zijn. Maar voor de eindopdracht van dit boekje is dit bewijs niet nodig. Ik vraag de leerlingen wel om een drieluik van een dambordpatroon te maken en te laten doorgeven in de klas. Soms laat ik ook het viervlak van de driepuntsperspectief tekening maken. Daarmee kan de stand van het hellend tafereel worden getoond.

N.b. De figuren 5, 6, 7, 8 en 9 zijn overgenomen uit het boekje.

Over de auteur

Rob van Oord gebruikt elk jaar vele boekjes in zijn klassen. Hij is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen. Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem mailen: *robvanoord@tiscali.nl*

DE DRIEHOEK VAN PASCAL

Henny Versteeg

HET HOCKEYSTICKPATROON

De driehoek van Pascal heeft een interessante eigenschap. Als je start op een willekeurige 1 aan de rand en je telt de getallen op de bijbehorende diagonaal op, dan is de som gelijk aan het getal dat niet op de diagonaal maar wel direct onder het laatste getal ligt. Henny Versteeg laat u zien welke wiskunde daar achter zit.

Bekijk de vorm $\frac{(1+a)^n-1}{a}$. Deze vorm is in ieder geval op twee verschillende manieren te herleiden:

(1)... $\frac{(1+a)^n-1}{a}=(1+a)^{n-1}+(1+a)^{n-2}+\ldots+(1+a)^1+(1+a)^0$;

dit is de (partiële) som van n termen [1] van een meetkundige rij met reden $(1 + a)$ en beginterm $1 = (1 + a)^0$.
En door $(1 + a)^n$ uit te schrijven en dan door a te delen, geldt:

(2)... $\frac{(1+a)^n-1}{a}=\binom{n}{0}a^{n-1}+\binom{n}{1}a^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-2}a+\binom{n}{n-1}$

Maar (1) en (2) zijn gelijk; dus moeten de coëfficiënten van de overeenkomstige machten van a gelijk zijn. Hieruit volgen betrekkingen voor de binomiaalcoëfficiënten. Zo geldt:
voor de coëfficiënt van a^{n-1} dat $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}$;

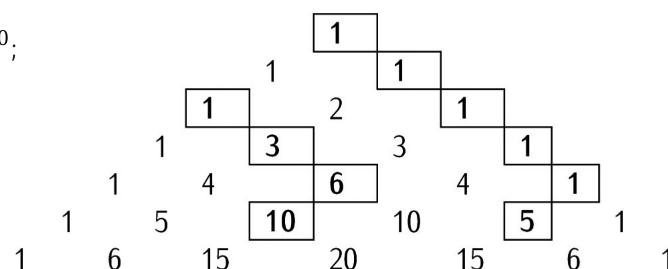
voor die van a^{n-2} geldt $\binom{n}{1}=\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{0}$

en voor de coëfficiënt van de algemene term a^{n-k-1} geldt dan: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\ldots+\binom{n-k-1}{0}$

Opmerking: deze laatste eigenschap is natuurlijk ook met volledige inductie te bewijzen. Ik laat dit aan de lezer.

Een gevolg van het bovenstaande voor de driehoek van Pascal is dat er naar iedere positie (binomiaalcoëfficiënt) in de driehoek een uniek pad is dat bestaat uit ten hoogste twee 'lijnstukken' waarvoor geldt dat de som van de coëfficiënten op de voorafgaande posities gelijk is aan de coëfficiënt van de eindpositie.

Voorbeelden



$10 = 6 + 3 + 1$, want $\binom{5}{2}=\binom{4}{2}+\binom{3}{1}+\binom{2}{0}$;

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, want $\binom{5}{4}=\binom{4}{4}+\binom{3}{3}+\binom{2}{2}+\binom{1}{1}+\binom{0}{0}$.

Noot

[1] Van de meetkundige rij a, ar, ar^2, ar^3, ... is de som van de eerste n termen (dus tot en met de term ar^{n-1}) gelijk aan $a\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$. Het getal r (de vermenigvuldigingsfactor 'van term naar term') wordt wel de reden van de rij genoemd. Voor het bewijs van de somformule zie bijvoorbeeld: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Meetkundige_rij*

Over de auteur

Henny Versteeg behaalde zijn eerstegraadsbevoegdheid MO B aan de universiteit van Leiden. Inmiddels geeft hij al 40 jaar les en is momenteel werkzaam op het Cosmicus College in Rotterdam.
E-mailadres: *hammie@zonnet.nl*

VASTGEROEST

TELEURSTELLING

Ab van der Roest

Een leraar heeft regelmatig met teleurstellingen te maken. Het is als het ware een deel van zijn leven. Althans, zo ervaart Ab van der Roest het soms. Hieronder een illustratie van wat hij bedoelt.

Als deel van een algebrasom moesten havo 4-leerlingen $(x + 3)^2$ uitwerken. En ja, u raadt het al: velen deden dat door $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ op te schrijven. Niet verrassend, maar wel irritant als elf van de 27 leerlingen dit niet goed doen. In de onderbouw is er over gesproken; het is herhaald en nog eens herhaald! Denk niet dat dit mijn teleurstelling was. Die kwam later. Op een cursus van het APS met als onderwerp reflecteren, zag ik het voorbeeld van een collega die zijn leerlingen liet beelddenken. Misschien de oplossing? Ik hoopte daarop.

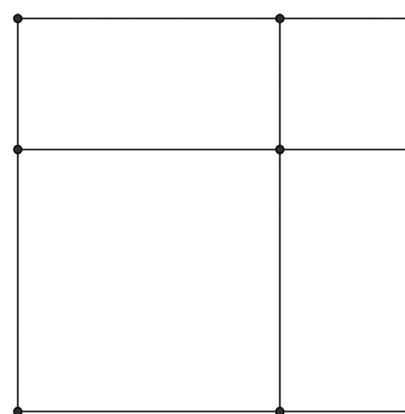
Mijn beginvraag aan de leerlingen was: 'Teken $3 + 5$ en 3×5'. Eerst iedereen voor zichzelf; daarna kort overleg met elkaar en dan centraal. U merkt wel dat ik goed opgelet had bij de cursus! Grote verwarring was het gevolg. $3 + 5 = 8$ en $3 \times 5 = 15$; dit is rekenen en wat kun je daar nu bij tekenen? In het gesprekje dat volgde, kwam er toch iets uit. Sommigen werkten met getallenlijnen en maakten daarmee lengtes en oppervlaktes. Iemand die beter was in beelddenken, werkte met hokjes van de chocoladereep. Dat is echt mooi.

\+ =

en

x =

Met een blok chocolade kun je precies het optellen en vermenigvuldigen voorstellen. Vervolgens vroeg ik een kwadraat te tekenen en daarna $(x + 3)^2$. Je hoopt dan dat de leerlingen het volgende plaatje tekenen:



Als ze dit plaatje kunnen tekenen en daarbij denken aan $(x + 3)^2$, zullen ze het dubbelproduct niet meer vergeten.

Wat was nu mijn teleurstelling? De leerlingen vonden mijn les helemaal niets. Kinderachtig. Ze konden de link niet leggen tussen het merkwaardig product en het plaatje. Het denken in beelden lukte bij een enkeling, maar de meeste leerlingen stonden er niet voor open. Is dit nu omdat het te incidenteel gevraagd wordt? Is het omdat ik een verkeerde startvraag koos? Is het omdat ik het probleem van het vergeten dubbelprodukt onvoldoende benadrukt heb? Ik weet het niet, maar ik stap over mijn teleurstelling heen en blijf proberen.

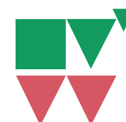
Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *a.b.vanderroest@ziggo.nl*

Euclides 89-3_v3.indd 33 28-11-13 10:38

JAARREDE 2013

Marian Kollenveld





Welkom

Dames en heren, hartelijk welkom, fijn dat u er weer bent. En ook nog met zovelen, we hebben een recordopkomst dit jaar. Ik wilde eerst zeggen 'historisch hoogtepunt', maar dat impliceert een terugval die we natuurlijk helemaal niet willen. En dus zeggen we dat niet, want wat je niet zegt, dat is er toch niet? We hebben kennelijk voor de studiedag onderwerpen gekozen die velen aanspreken; sommige werkgroepen zijn echt overvol. Dus welkom, ook voor de nieuwe leden. Dat waren er dit jaar ruim 200, waarvan er vijftig hiernaartoe zijn gekomen. Even kijken of ze ook al zo vroeg aanwezig zijn? Daar gaan we straks lekker mee lunchen met een feestelijk bubbeltje, en we hopen dat zij lang lid zullen blijven.

Blijf lid

Als lokkertje misschien dit: afgelopen jaar hebben we alle leden die vijftig jaar of langer lid waren een mooi boeket gestuurd. Dat waren er geen 200 meer, dat snapt u, maar ik vind het altijd heel bijzonder dat we zoveel trouwe leden hebben. Daar kan dan wel een bloemetje af na vijftig jaar, dus blijft u vooral lid; de tijd vliegt. Uit de bedankbriefjes en telefoontjes die we kregen, bleek dat de vereniging voor hen van betekenis was. En dat is mooi, en dat herken ik ook, maar naast oud moet ook jong meehelpen de toekomst van de vereniging vorm te geven.

De toekomst

Want ja, die toekomst, we staan op de drempel van een generatiewissel, in de maatschappij, en in het bestuur: u hebt het in het mapje kunnen lezen. Komend jaar stopt de secretaris ermee, stop ik ermee, en een aantal bestuursleden zit in hun laatste termijn. Ik ga met pensioen, en ik heb altijd het principe gehuldigd dat de voorzitter van een vakinhoudelijke vereniging zelf actief voor de klas moet staan, als nuchter tegenwicht tegenover al die mensen die het vanachter een bureau langs de zijlijn zo goed menen te weten. En daarbij dateert mijn voorzitterschap al uit de vorige eeuw, ik ben dus al een eeuwigheid voorzitter. Met vreugde en enthousiasme zeker, en ik ga het zeker missen; daarom heb ik nog een jaar om aan het idee te wennen. En dus ook tijd om een opvolger (m/v) te zoeken, te vinden en in te werken. Ik hoop daarbij op jullie medewerking. We hebben vandaag bijna 500 man binnen, daar moet toch bestuurlijk talent tussen zitten?

Krachtig vooruit

In het zicht van pensioen kun je een paar dingen doen, rustig kabbelen, of uitgebreid terugkijken, maar dat past me niet zo, liever gaan we gewoon lekker door als bestuur, een eindsprintje zo u wilt. Krachtig vooruit, het thema van deze dag. Er is altijd van alles te doen, en er liggen nog een paar belangrijke zaken rond de kwaliteit van het wiskunde-onderwijs die ik nog graag een slinger wil geven.

Euclides 89-3_v3.indd 34 28-11-13 10:38

Drie thema's

Allereerst de nascholing, we roepen het al jaren en het is inmiddels overal wel doorgedrongen: de kwaliteit van het onderwijs hangt in hoge mate samen met de kwaliteit van de docent. En die kwaliteit moet op orde zijn, aan het begin van de loopbaan, en later. Een permanent aanbod van goede cursussen is dan essentieel, maar dat is nu nog bedroevend slecht financieel geregeld. We hebben in het overleg met OCW aangedrongen op een oplossing en misschien mogen we een pilotproject starten voor wiskunde in de Tweede fase (lees: misschien komt er geld om modules te ontwikkelen). Dat geldt dan zowel voor de huidige programma's als voor de cTWO-programma's. Daarmee helpen we iedereen die nu en in de toekomst in de bovenbouw lessen moet verzorgen, dus het zou mooi zijn als het lukt. U hoort nog van ons.

Ten tweede: Bij goed onderwijs hoort ook onderzoek naar hoe dat onderwijs te verbeteren valt, liefst zoveel mogelijk praktijkgericht. Het pas opgerichte nationaal regie-orgaan dat onderwijsonderzoek financiert, heeft dat ook hoog in het vaandel staan. We zijn daarom erg blij dat ons verzoek om wiskunde als een van de thema's te kiezen is gehonoreerd, waardoor er nu een paar ton beschikbaar is voor onderzoek.
Jullie willen vast liever miljoenen, maar a) die zijn er niet, en b) dat zouden we niet eens aankunnen. Een deelcommissie van PWN heeft een inventarisatie gemaakt van de huidige onderzoekscapaciteit, en die is schokkend laag. Dat brengt me op het volgende punt: de noodzaak van hoogleraren (meervoud) vakdidactiek wiskunde aan universiteiten als centrale, inspirerende figuren binnen de ontwikkeling en het onderzoek. Het is bizar, maar die hebben we niet meer. En er is echt behoefte aan meer kennis, bijvoorbeeld op het gebied van het inzetten van ICT in het onderwijs en het bevorderen van het leren denken van leerlingen in de wiskundeles, niet toevallig twee kernthema's van cTWO. Dat vindt niet vanzelf zijn weg in het onderwijs, en meer kennis kan ons in discussies ook wellicht verder brengen dan het simpelweg uitwisselen van standpunten voor of tegen iets (contexten, grafische rekenmachine), waar het nu vaak blijft hangen.

Dit zijn allemaal zaken waarvoor een krachtige beroepsvereniging als de onze onontbeerlijk is. (Ik mocht vandaag een beetje trots doen van mezelf.) En met de oprichting van PWN is heel wiskundig Nederland onder één dak, ook de universiteiten, dat maakt het mogelijk om dit nu in gezamenlijkheid aan te pakken. Want universiteiten zijn verantwoordelijk voor hoogleraarplaatsen.

Ideetje

Ja, die universiteiten: volgens een recent politiek ideetje worden die verantwoordelijk voor het leveren van alle leraren in de bovenbouw van het vwo. Sympathiek idee, positief bedoeld, en vroeger ook wel in grote mate het geval. Maar jaren onderwijsbeleid eisen hun tol, dat maak je niet zomaar ongedaan. Dus is de vraag: hoe ga je dat doen? Verplicht stellen in 2000-zoveel klinkt als: klap erop, opgelost, volgende zaak.
Maar er zijn wel wat vragen van praktische aard: waar haal je ze vandaan? De huidige hbo eerstegraders allemaal aan de studie, en de vrijvallende lessen dan vervangen door ...? Of heel veel verse studenten? En hoe houd je die dan in het onderwijs? Heel veel beginnende leraren (ik las getallen van 20 tot 43%) zijn binnen vijf jaar weer verdwenen, vanwege onder meer de hoge werkdruk en de beperkte doorgroeimogelijkheden. Als je dat oplost, ben je al een heel eind. Eerst het lek dicht, dan de kraan open.

Leuk idee dus van deze onderwijswoordvoerder, waarschijnlijk de meest deskundige in zijn fractie, maar helaas een idee met beperkte realiteitswaarde. Jammer dat hij het niet ook had over de behoefte aan echte (in het doceren van het vak wiskunde opgeleide) wiskundedocenten in het vmbo (het numeriek grootste schooltype met het oudste wiskundeprogramma).

Oplossingen

Maar ik weet ook wel dat het echt oplossen van deze lastige problemen een kwestie is van langdurige koersvaste inspanning, en het huidige onderwijsbeleid is daar te springerig voor. De Onderwijsraad schrijft nu al weer over teveel aandacht voor rekenen en taal, waar wij nog maar net bezig zijn met de reparatie. En ook dat was een politieke haastklus. Ik heb het er al heel vaak over gehad, stoer aan het eind beginnen met een rekentoets zonder voorafgaand onderwijs door daartoe bekwame en bevoegde docenten is zelden effectief. En alle aandacht voor die toets en wat er allemaal aan schort kan een oplossing van het echte probleem gemakkelijk in de weg staan. Het gedeelde doel is dat leerlingen weer voldoende rekenvaardig worden, maar daar hoort ook goed rekenonderwijs bij, en dat blijkt aanmerkelijk minder eenvoudig dan eerst gedacht werd. We hebben hierover een brief gestuurd naar de staatssecretaris met een voorstel voor een duurzame oplossing van de rekenproblematiek, waarbij aandacht voor rekenen in het voortgezet onderwijs niet het exclusieve domein wordt van één vak, maar ingebed in alle vakken met een kwantitatieve component, zoals ook vroeger veel

'GAAT DE VORM VAN DE TOETS DE INHOUD VAN HET ONDERWIJS STUREN?'

meer het geval was. Daarmee doe je recht aan het brede maatschappelijke belang van rekenen. Uiteraard heeft wiskunde daarin een aandeel, maar niet alleen. De brief staat op de site en is meegenomen in het Kamerdebat van afgelopen donderdag. Tijdens dat debat heeft de Tweede Kamer besloten tot een hoorzitting over dit onderwerp, waar wij ook voor worden uitgenodigd. Dat is een enorme winst vergeleken bij een aantal jaren terug: toen had men een overtuiging, niet gehinderd door al teveel kennis, en was men volstrekt niet geïnteresseerd in wat wij te berde brachten. Als er meer kennis is, weet je ook beter wat je niet weet. De Kamerleden beseffen nu dat ze onvoldoende zijn geïnformeerd, en dat geeft ruimte, en misschien een beetje hoop op een goede afloop.
Als eigen bijdrage gaan we komend jaar het materiaal van RekenVoort weer een slagje verder helpen, zodat veel leden hiervan gebruik kunnen maken. (Het is vrij beschikbaar, maar wel graag met bronvermelding.)

Toets, toets, nog een toets

Naast de rekentoetsen met consequenties komen er toetsen van tussendoelen aan het eind van de onderbouw, gelukkig alleen diagnostisch. Het is te hopen dat dit minder problematisch zal verlopen dan de rekentoetsen en we er als leraren en leerlingen ook wat aan zullen hebben. Immers, tijd die weggaat met toetsen – en het voorbereiden op een digitale toets – gaat af van de tijd die je aan onderwijs kunt besteden. Gaat de vorm van de toets de inhoud van het onderwijs sturen? Vooralsnog hebben we veel vragen, maar we blijven ook hierover in gesprek met alle betrokkenen, ook beleidspersonen.

'SINDS VANDAAG IS ER EEN HEUSE APP VOOR UW MOBIEL OF TABLET BESCHIKBAAR.'

Participatiemaatschappij

Want de politiek blijft zich voortdurend bemoeien met onderwijs, en het is dan aan ons om het vakbelang over het voetlicht te brengen. Maar ach, het blijft boeiend, en we staan er nog steeds retorisch goed op; de staatssecretaris heeft gisteren persoonlijk bij de Wiskunde Olympiade onze prijzen overhandigd, dat is echt heel mooi. De participatiemaatschappij in combinatie met de zuinige overheid: wij betalen de prijzen en hij deelt ze uit. En in de krant vliegen de miljoenen voor onderwijs je om de oren. Of ze allemaal veilig zullen landen, moeten we nog even afwachten.
Weet u nog dat ik vorig jaar de woorden van het regeerakkoord zo mooi vond en zei: 'En verder is het wel te hopen dat ze een tijdje blijven zitten, want anders zijn voor je het weet de gratis schoolboeken die nu afgeschaft worden weer aangeschaft en komt de maatschappelijke stage terug die verdwijnt nu we hem net een beetje hebben opgetuigd. Maar ja, dat heet daadkracht, en dat kan twee keer: eerst schaf je het daadkrachtig aan, en dan schaf je het daadkrachtig af.'
Ik had me vergist, het kon nu al daadkrachtig drie keer, we krijgen nu geen-geen gratis schoolboeken. Maar gratis is niet gratis natuurlijk, dat staat gewoon op de onderwijsbegroting in plaats van iets anders. Die miljoenen zijn alvast niet meer beschikbaar voor het primaire proces. Voor de klas en de leraar dus.

Weer thuis

En zo zijn we weer thuis, de leraar en de klas, en wat we er zelf aan kunnen doen. Daar voel ik me vaak prettiger bij, en we kunnen best zelf wat... Bijvoorbeeld: een veel genoemde oorzaak van het voortijdig vertrek van jonge leraren bleek een gebrekkige begeleiding in de school, en dan meer vakinhoudelijk dan sociaal. Het leek ons daarom een goed idee om te proberen of wij de kennis van onze ervaren leden konden benutten voor de jongeren. We wilden dat al eerder, een soort jong-oud datingsite, maar met de nieuwe website is dat ook technisch beter te realiseren. Met datzelfde doel hebben we dit jaar een examennakijkcursus havo/vwo gestart, die een groot succes was. We gaan er dit jaar mee door en breiden uit naar vmbo. Ook dit jaar zijn er overigens alleen centrale eindexamenbesprekingen. En in die doorgroeimogelijkheden kunnen we ook voorzien: een actieve deelname in de vereniging staat leuk op je cv en is ook verrijkend, dus heel goed voor je.

Over alles

Het is in een jaarrede niet mogelijk om even alles door te nemen wat we doen en gedaan hebben, daarvoor gebeurt er teveel. Maar we houden u graag op de hoogte. U vindt daarom in het programmaboekje weer een overzichtje met activiteiten en contactpersonen, er zijn de jaarverslagen, er is *Euclides* met het verenigingsnieuws en de website, waar elke werkgroep zijn eigen pagina's heeft gekregen. Daar ziet u bijvoorbeeld dat de werkgroep hbo onverminderd actief bezig is met het verspreiden van hun strategische nota over de aansluiting op het hbo vanuit mbo en vo, en dat er gewerkt wordt aan kennisbases wiskunde voor economie en techniek.
De werkgroep havo/vwo is na hun adviezen over havo wiskunde C en rekenen nu bezig met de didactiek en schrijft daarover stukjes in *Euclides*; de historische werkgroep heeft zelfs eigen flyers en doet enthousiast mee met de voorbereiding van het jubileum, omdat ze zelf ook wel wat te vieren hebben. Het Wereldwiskundefonds heeft onlangs heel veel geld opgehaald, en heeft ook een feestje, vanwege hun twintigjarig bestaan. Korter kan ik het niet zeggen: gaat u vooral zelf kijken, meldt u aan en doe mee.

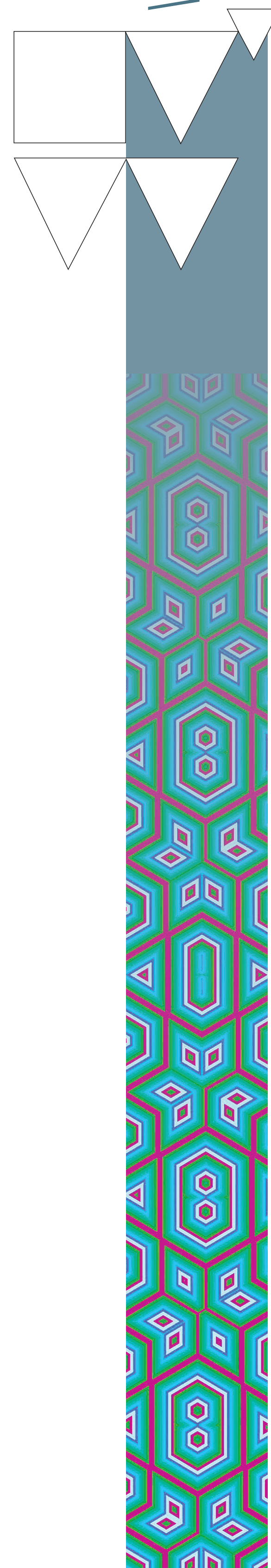
Krachtig vooruit

En dit heb ik voor het laatst bewaard, want daar zijn we wel erg trots op (en het heeft een bom duiten gekost, dus ik hoop dat jullie dat ook zijn). We zijn ook zelf weer krachtig vooruit gegaan.

1. De ledenadministratie van onze vereniging wordt gedigitaliseerd en gekoppeld aan de toegang tot het besloten deel van de website. Nu is er een inlogmogelijkheid voor onze leden tot de ledenadministratie via de vernieuwde website. Tot nu toe moest Elly van Bemmel, als u wijzigingen mailde, deze nog handmatig in haar eigen systeem invoeren. Dat wordt nu één administratiesysteem, gekoppeld aan de site, maar uiteraard wel gecontroleerd door de ledenadministratie. U kunt dan voortaan zelf een aantal gegevens wijzigen. Dit werkt voor u en voor de vereniging sneller. Voor het nieuwe verenigingsjaar sturen we u in principe geen acceptgiro meer, maar een digitale factuur. Uw gegevens zijn uiteraard niet toegankelijk voor derden. Als er iets mis gaat, kunt u dat altijd melden, want er blijven natuurlijk mensen actief achter die systemen.
2. De vernieuwing van de website zal de komende maanden afgerond worden. De site moet nog verder gevuld worden, het forum moeten we nog toevoegen. In januari is er een evaluatie met alle direct betrokkenen om te zien om de vernieuwing aan onze wensen voldoet. De website zou nu toegankelijk moeten zijn in alle browsers en alle besturingssystemen; ook zou de snelheid verbeterd moeten zijn. Bovendien is er sinds vandaag een heuse app voor uw mobiel of tablet beschikbaar. Ik heb hem al. U hoeft dus geen moment meer zonder uw vereniging. Mocht u nog vragen of opmerkingen hebben: de webmasters hebben deze keer een eigen stand waar ze u graag verder helpen waar nodig. Ze zijn van zichzelf nogal bescheiden, maar zonder onze webmasters, de oude en de nieuwe, was dit ingewikkelde proces niet gelukt. U kunt dus ook naar de stand voor een complimentje of het melden van een positieve ervaring.
3. U heeft het al gemerkt: We kunnen u nu ook direct per mail bereiken via de NVvW-nieuwsbrief. We zullen deze onregelmatig inzetten om u te informeren of te consulteren. De nieuwsbrief gaat naar het mailadres in de ledenadministratie, het is dus van belang om dat actueel te houden (of niet natuurlijk, als u het wat rustiger wilt hebben).
4. En tenslotte ons blad *Euclides*; ik hoef daar weinig over te zeggen, u heeft inmiddels in twee nummers zelf kunnen zien hoe mooi het is geworden: voor het eerst in kleur, en het blad is ook direct gekoppeld aan de website, waardoor er meer ruimte is voor achtergronden en uitvoerige artikelen. We hebben als experiment ook de jaarverslagen in de digitale editie gezet, in de verwachting dat u dan zeker voor deze vergadering even een kijkje zou nemen. Je ziet dat bij meer tijdschriften tegenwoordig, een combinatie van papier en digitaal, en ook in die zin is *Euclides* nu een modern blad geworden waar we terecht trots op zijn.

Dank!

Er is de afgelopen periode verschrikkelijk veel werk verzet door heel veel mensen, vanuit een grote betrokkenheid bij de vereniging, die ons verheugt en ook dankbaar stemt. De redactie, de webmasters, in het bestuur penningmeester Gert de Kleuver en Johan Gademan als zeer deskundig begeleider van het proces. En niet te vergeten Elly en Pim van Bemmel van de financiële en ledenadministratie, die naar de nieuwe site moest. Na vandaag is hun werk afgerond, maar ze blijven nog wel het winkeltje doen. U kunt ook bij hen even langs voor een beetje afscheid, maar ze zijn nog niet helemaal weg. U merkt dat de vereniging ondanks haar bijna 90 jaren nog steeds midden in het wiskundeleven staat. Het bestuur zal zich blijven inzetten voor het waarborgen en versterken van de positie van het vak wiskunde en de wiskundeleraar in het onderwijs, om het werk voor de wiskundeleraar werkbaar te maken en te houden. Een bestuur kan al die ontwikkelingen en activiteiten nooit alleen aan. We zijn trots op al die mensen in de vereniging die zich voor de goede zaak willen inzetten. We hebben elkaar nodig, samen staan we sterker. Ik wil dus graag besluiten met alle vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet. En ik wens u en ons een goede toekomst met veel mooi wiskundeonderwijs.
Dank u wel.



PUZZEL 89-3

DIAGONALEN IN HET KWADRAAT

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

De meetkunde van een regelmatige *n*-hoek biedt verrassend veel mooie patronen en verbanden, een mooi onderwerp voor praktische opdrachten of profielwerkstukken. Denk bijvoorbeeld aan de verhoudingen waarin de diagonalen elkaar verdelen. Meest bekend daarbij is de gulden snede in de regelmatige vijfhoek. Maar ook bij andere waarden van *n* zijn hier allerlei regelmatigheden in te ontdekken.[1]

We zullen ons hier beperken tot enkele mooie stellingen over de kwadraten van de lengtes van de diagonalen en zijden van een regelmatige n-hoek vanuit één hoekpunt P, getekend op een cirkel met straal 1, zie figuur 1. We noemen die lengtes d_r met $0 < r < n$. Een hele fraaie stelling gaat over het product van die lijnstukjes. We noemen dat hier de **productstelling: het product van alle verbindingslijnen d_r vanuit P is gelijk aan n.**

In formule: $\prod_{r=1}^{n-1} d_r = n$.

Omdat er steeds paren lijnstukjes zijn met gelijke lengte geldt voor oneven n:
$\prod_{r=1}^{(n-1)/2} d_r^2 = n$ en voor n even: $2\prod_{r=1}^{(n/2)-1} d_r^2 = n$. Dat zijn dus de kwadraten van de rode lijnstukjes. We kunnen dit controleren door alle d_r uit te drukken in goniometrische formules, maar een algemeen bewijs werkt met complexe getallen.[2, 3, 4]

Ook fraai is de stelling die we hier **kwadratensom** zullen noemen: **De som van de kwadraten van d_r is gelijk is aan $2n$.** In formule: $\sum_{r=1}^{n-1} d_r^2 = 2n$.

Bekijken we weer alleen de rode lijntjes: Voor oneven n wordt dit: $\sum_{r=1}^{(n-1)/2} d_r^2 = n$ en voor n even: $2 + \sum_{r=1}^{(n/2)-1} d_r^2 = n$. Voor oneven n geldt dan de opmerkelijke gelijkheid:

$$\prod_{r=1}^{(n-1)/2} d_r^2 = \sum_{r=1}^{(n-1)/2} d_r^2 = n .$$

De kwadratensom is te bewijzen met een zuiver meetkundige of analytische aanpak. De som van de vectoren vanuit M naar alle n hoekpunten is gelijk aan 0. Dus ook de som van de horizontale componenten van alle vectoren is 0, zie figuur 2. Dit kunt u gebruiken bij de volgende opgaven. Als u bij opgaven 1 en/of 2 de b-vraag correct heeft opgelost is a niet nodig.

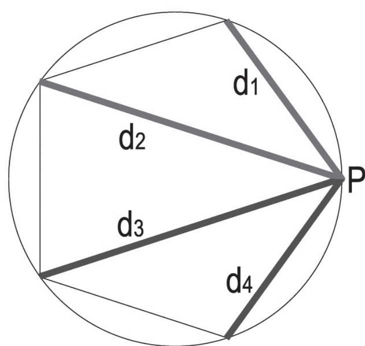
Opgave 1

a. Controleer de twee stellingen (**som** en **product**) voor $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (ook een mooie oefening voor uw leerlingen).
b. Bewijs de stelling van de **kwadratensom** voor alle n, even en oneven.

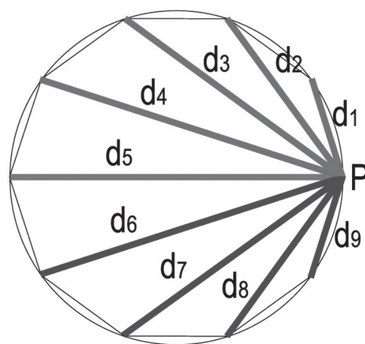
Als we weten dat voor een zekere waarde $n = k$ de **productstelling** klopt, dan kunnen we wel zonder complexe getallen bewijzen dat de stelling ook klopt voor $n = 2k$, of andersom. Dit kan goniometrisch, maar ook met eenvoudige vlakke meetkunde.

Opgave 2

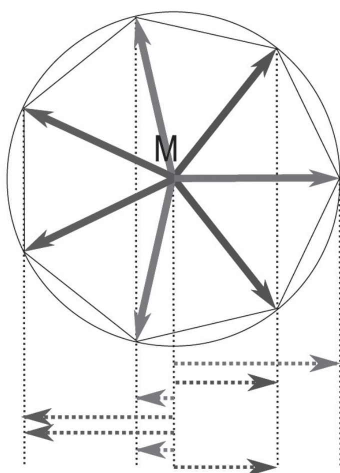
a. Bewijs dit voor $k = 5$.
b. Geef een algemeen bewijs.



figuur 1a



figuur 1b



figuur 2

Noten

[1] Zie *http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/imo-training-geometry/reg-poly.pdf*

[2] Zie *www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/ProductOfDiagonals.shtml*

[3] Klingens, D. (2004). Klassikaal, *Euclides, 80*(2), 70-71.

[4] Honsberger, R. (2003). *Mathematical Diamonds*. The Mathematical Association of America.

Inzenden oplossingen

Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen en extra punten bij gebruik van uw ideeën voor een nieuwe puzzel. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is **15 januari a.s.**

Wij wensen u veel plezier.

UITWERKING PUZZEL 89-1
RECREATIE(VE) CREATIES

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

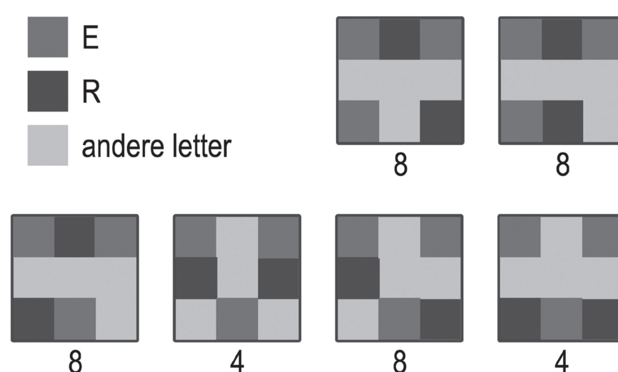
Er waren dertien inzenders. De sudoku verleidde één nieuwe inzender tot puzzelen en diverse familieleden van inzenders tot meepuzzelen.

Permutaties van de negen letters uit het woord RECREATIE noemden we 'CREATIES' en de opgaven gingen over het 'tellen' van het aantal mogelijke CREATIES onder bepaalde voorwaarden. Hoewel bleek dat door handig en vooral systematisch tellen de antwoorden konden worden gevonden, geven we hier een meer wiskundige aanpak die gedeeltelijk ook door enkele inzenders werd toegepast. Een meer ingewikkelde aanpak leverde nogal eens vergissingen op.

Opgave 1 en 2 – Bepaal het aantal verschillende CREATIES waarbij er nergens twee letters R of twee letters E naast elkaar staan.
Algemeen: k gelijke tekens in een bestaand rijtje van n tekens invoegen, zodanig dat ze nergens naast elkaar komen: Tussen en naast die n tekens zijn er $n + 1$ plaatsen waarover we die k tekens moeten verdelen. Dat kan op $f(n,k)=\binom{n+1}{k}$ manieren. De enige die deze efficiënte methode gebruikte was Jan Meerhof.
Geen RR: De andere letters, waarbij drie letters E, vormen een rijtje van zeven tekens. Dat kan op $7!/3! = 840$ manieren. Twee letters R niet naast elkaar invoegen kan op $f(7,2) = 28$ manieren. Totaal: $28 \times 840=23520$. Alternatief voor $k = 2$: Beschouw RR als één teken geeft $9!/(2! \times 3!) - 8!/3! = 23520$.
Geen EE: De letters $\neq$ E vormen een rijtje van zes letters. Dat kan op $6!/2! = 360$ manieren. Drie letters E niet naast elkaar invoegen kan op $f(6,3) = 35$ manieren, geeft totaal $35 \times 360 = 12600$.

Opgave 3 – Geen gelijke letters naast elkaar. Iedereen begon met de letters E, maar het kan ook door met de letters R te starten. Daartoe onderscheiden we twee manieren waarop de letters R gescheiden kunnen worden: (1) door één of meer tekens waarvan minstens één letter uit de letters CATI; (2) door precies één E, dus RER.

(1) Combineer twee letters R niet naast elkaar met CATI. Dat kan dat op $f(4,2) = 10$ manieren. We hebben dan een rijtje van zes letters. Dat combineren met drie E's niet naast elkaar: Dat kan op $f(6,3) = 35$ manieren. Totaal, met de permutaties van CATI dus $10 \times 35 \times 4! = 8400$.



figuur 1

C	R	E	R	E	I	E	T	A
R	I	T	R	E	A	E	E	C
E	E	A	E	T	C	R	R	I
E	R	E	C	E	R	A	I	T
I	E	R	T	A	E	R	C	E
T	A	C	E	I	R	E	E	R
A	E	E	I	R	T	C	R	E
E	T	R	E	C	E	I	A	R
R	C	I	A	R	E	T	E	E

figuur 2

(2) Beschouw RER als één teken. Samen met CATI zijn dat er vijf, nog te combineren met twee E's, niet naast elkaar. Dat kan op $f(5,2) = 15$ manieren. Totaal dus $15 \times 5! = 1800$.

(1) + (2) geeft dan 10200 manieren.

Opgave 4 – Nu moesten de letters passen in een vierkant van 3 bij 3, waarbij gelijke letters elkaar niet mogen raken, niet recht en ook niet schuin. Hier werd het gewoon handig tellen. Door te letten op symmetrie reduceerde Frits Göbel het aantal mogelijkheden tot zes: twee manieren voor de letters E en daarbij resp. twee en vier voor de letters R. Zie figuur 1. Daarin staan het aantal draai- en spiegelsymmetrieën, totaal 40. Vermenigvuldigen met 4! voor de letters CATI geeft 960 manieren.
Opmerking: Enkelen interpreteerden vooral opgave 4 iets anders, wat we gedeeltelijk hebben gedoogd.

Opgave 5 – Door Harm Bakker gedoopt tot CREDOKU (zie figuur 2). De meeste mensen moesten even wennen, maar toen viel het wel mee.

Ladderstand

De top-10 op de ladder na puzzel 89-1 is:

H. Linders	129
H. Klein	118
K. van der Straaten	111
J. Meerhof	104
K. Vugs	103
F. Göbel	96
R. Stolwijk	89
J. Verbakel	78
G. Bouwhuis	76
H. Bakker	74

De ladderprijs is gewonnen door Hans Linders. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzending bijdragen
Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast. Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail redactie@nvvw.nl

2014

za 11/01 UTRECHT
KWG Wintersymposium 2014
Mathematics of Planet Earth. Organisatie KWG

do/vr 16/17 01 NOORDWIJKERHOUT
Panama-conferentie. Organisatie FSW, UU

ma/do 20/01 30/01 OP DE SCHOLEN
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Zie *www.wiskundeolympiade.nl/*

vr/za 31/01 01/02 NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen. Organisatie FIsme

woe 12/02 OP DE SCHOLEN
Onderbouw Wiskunde Dag. Organisatie FIsme

woe 02/04 OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag, Organisatie FIsme

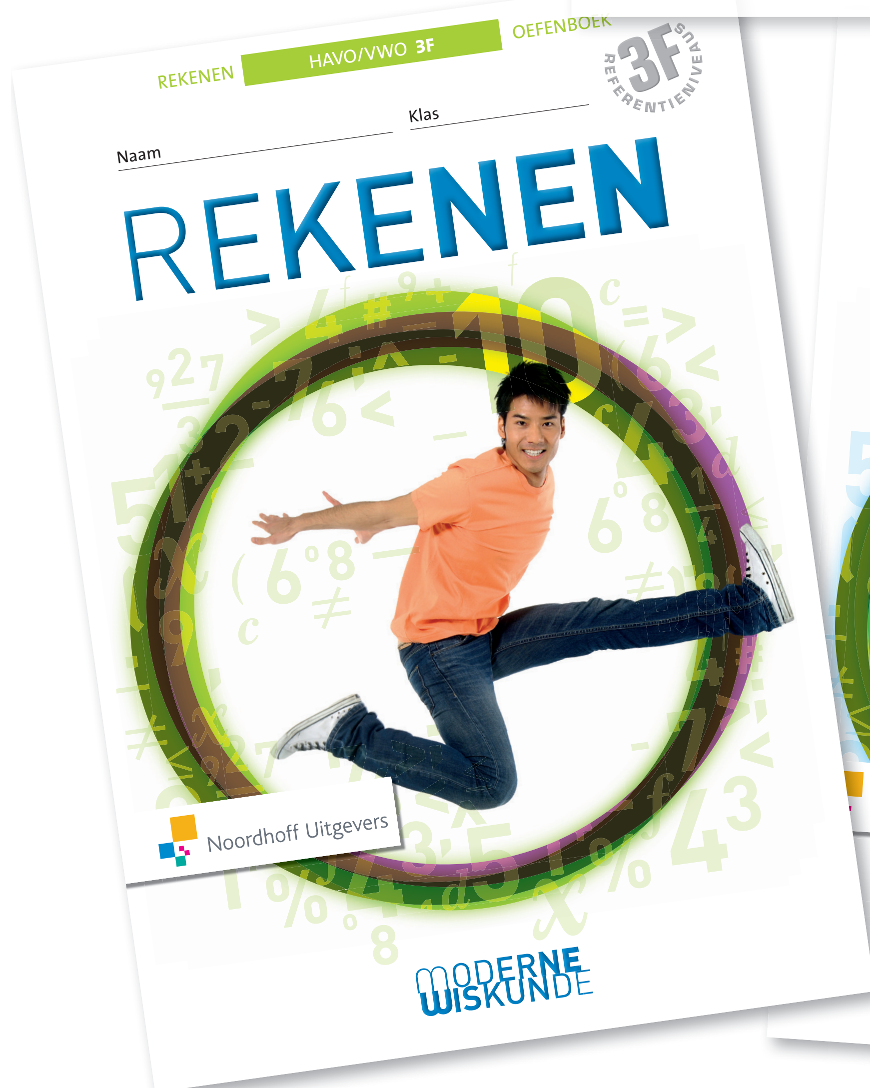
vr 11/04 AMSTERDAM
Docentencongres Leve de Wiskunde! Organisatie UvA

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 89

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	17 september 2013	24 juni 2013
2	5 november 2013	2 september 2013
3	17 december 2013	28 oktober 2013
4	6 februari 2014	2 december 2013
5	25 maart 2014	27 januari 2014
6	13 mei 2014	17 maart 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

Kent u onze 2F en 3F rekenboeken al?





Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!



Geheel vernieuwd!
Moderne Wiskunde Rekenen

Vraag vandaag nog de boeken aan via
www.modernewiskunderekenen.noordhoff.nl

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent